ДОРОГИЕ ЮНОШИ И ДЕВУШКИ !

Московский государственный университет имени Н.Э. Баумана готовит специалистов по всем современным областям науки и экономики, способных осуществлять исследования и разработку новой техники, материалов и технологий на уровне, превышающем лучшие мировые достижения.

Если Вы хотите получить ЗНАНИЯ и успешно **сдать** вступительные экзамены в МГТУ или другие технические вузы, приходите на **ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ**.

Занятия проводятся 3 раза в неделю по математике, физике, русскому языку и литературе.

ПРИЕМ НА КУРСЫ С 1 СЕНТЯБРЯ.
ЗАНЯТИЯ НА КУРСАХ ЗАКАНЧИВАЮТСЯ 20 МАРТА.
С 23 ПО 31 МАРТА ПРОВОДЯТСЯ ТЕСТОВЫЕ ЭКЗАМЕНЫ.

В весенние каникулы ежедневно работают **экспресс-курсы**.
Действуют **заочные** курсы со сроком обучения 1 и 2 года.

Наш адрес: Москва, 2-я Бауманская ул., дом 5, комната 201а.

ТЕЛЕФОН ДЛЯ СПРАВОК: 263 - 64 - 22.

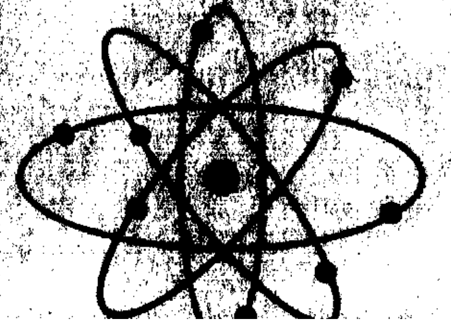
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

В.А. КОЛЕСНИКОВ

ФИЗИКА
ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

Часть 1

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ



Дорогой друг!

Оцифрованный вариант первой части данного пособия для поступающих в ВУЗы облегчит Вам задачу поиска этой ставшей популярной среди абитуриентов книги.

Материал книги изложен таким образом, что теория и методы решения задач (в том числе 7х задач, предлагаемых на вступительном экзамене в МГТУ им. Баумана) будут интересны абитуриентам не только со средним и высоким уровнем подготовки, но и понятны абитуриентам с невысоким уровнем.

Книга эта - хороший помощник. Но мой Вам совет: просто прочитать решение задачи недостаточно, попробуйте самостоятельно прорешать подобные задачи, уже не заглядывая в книгу. Не надейтесь на то, что на экзамене у Вас будет возможность достать распечатки этого файла размерами 2смX3см, хотя такая возможность у Вас будет. Попробуйте понять методы, логику решения. Поверьте, физика - не просто предмет, который необходимо сдать на отл. на вступительных экзаменах в МГТУ, физика - это фундамент для формирования будущего инженера. Чем больше Вы сделаете сегодня, тем меньше вам придется делать завтра.

Успехов Вам на экзаменах!
С уважением, $e®_gun.

Вопросы можно задавать на e-mail: ser_gun@mstu.ru
icq: 100804070

Заходите на неофициальный сайт МГТУ им. Баумана http://www.mstu.ru .

З.Ы. Благодарности принимаю в любом виде после Вашего поступления в МГТУ им. Баумана ;).

Содержание

ББК 23. Я 729
К 60

Колесников В.А. Физика. Теория и методы решения конкурсных задач. Часть I. Пособие для поступающих в вузы. М.: Учебный центр «Ориентир» – «Светоч Л», 1998. с. 217.

Аннотация

В первой части данного пособия изложены основные теоретические сведения по механике, молекулярной физике и термодинамике. Подробно разобраны конкурсные задачи по указанным разделам от простейших до задач повышенной сложности. Рассмотрены некоторые идеи и подходы для решения задач повышенной сложности, составляющих основную часть на вступительных экзаменах по физике.

Для учащихся старших классов средней школы, слушателей подготовительных отделений и курсов, а также лиц, самостоятельно готовящихся к вступитеным экзаменам по физике.

Автор надеется, что пособие будет полезным для учащихся с различным уровнем подготовки.

ISBN 5-93022-010-7

Учебное издание

Владимир Александрович Колесников

Физика. Теория и методы решения конкурсных задач. Часть I.
Пособие для поступающих в вузы

107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Компьютерный набор и верстка Воронина О.С.
Редактор Бойцова Н.Г.
Издается при участии ООО «Светоч Л»
ЛР №07164 от 06.05.98г.

Подписано в печать 05.08.98г. Формат 84x108/32
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 9,5. Физ. печ. л. 7,0
Уч – изд. л. 9,52. Тираж 5000 экз. Зак. № 361

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ИПО Профиздат, 109044, Москва, Крутицкий вал, 18.

Глава 1. Кинематика

1.1. Основные понятия

Механическим движением тела называют изменение с течением времени его положения в пространстве относительно других тел. В кинематике изучается движение тел без исследования причин, вызывающих это движение.

Если все точки тела двигаются одинаково и при этом прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе, то такое движение называется **поступательным**.

В ряде задач размерами тела можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на которое перемещается тело. В этом случае говорят о **материальной точке**. Понятия поступательного движения и материальной точки позволяют описывать движение только одной точки тела.

Движение тела в пространстве происходит вдоль линии, которая называется **траекторией**. Для описания движения тела надо указать какое-либо другое тело, относительно которого происходит движение. Его называют **телом отсчета**. Связанная с телом отсчета система координат, а также часы для отсчета времени образуют **систему отсчета**. Движение всегда описывается в какой-либо системе отсчета.

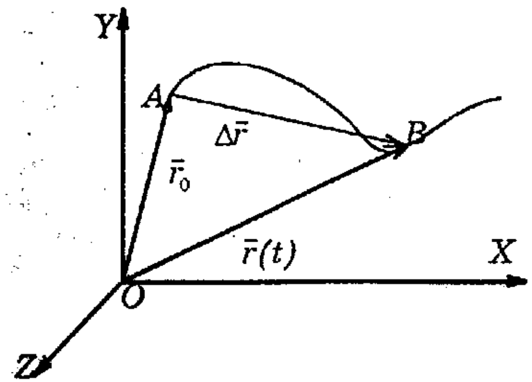


Рис. 1.1

Существует несколько способов описания движения. **Векторный способ** основан на том, что положение материальной точки в любой момент времени определяется вектором $\bar{r}(t)$, проведенным из начала координат к движущейся точке (рис. 1.1.). Вектор $\bar{r}_0 = 0$ задает положение точки в момент времени $t = 0$.

Закон движения – это уравнение, выражающее зависимость вектора $\vec{r}$ от времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Если спроецировать вектор $\vec{r}(t)$ на оси координат, то получим координаты x, y, z движущейся точки. Причем векторному уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$ соответствует система трех алгебраических уравнений

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

В этом случае говорят о координатном способе описания движения. В момент времени $t = 0$ координаты точки x_0, y_0, z_0 называют начальными координатами.

Вектор $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.1), направленный от положения точки в начальный момент времени к ее положению в конечный момент, называется **вектором перемещения**.

На рис. 1.1 показан вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. При движении по произвольной замкнутой траектории вектор перемещения $\Delta\vec{r} = 0$. Зная начальное положение точки, определяемое вектором $\vec{r}_0$, и вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, всегда можно определить положение точки как

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}} \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ и, следовательно, координаты вектора перемещения равны:

$$x(t) - x_0; y(t) - y_0; z(t) - z_0.$$

Пройденный путь S – это расстояние, пройденное точкой вдоль траектории. Пройденный путь – скалярная величина, принимающая только неотрицательные значения $S(t) \geq 0$. Пройденный путь – **неубывающая функция времени**, т.е. из того что $t_2 > t_1 \Rightarrow S(t_2) \geq S(t_1)$. Модуль вектора перемещения Δr и **пройденный путь** S **в общем случае не совпадают.** Например, тело, совершив один полный оборот по окружности радиусом R, пройдет путь $S = 2\pi R$, модуль вектора перемещения в этом случае равен 0.

1.2. Прямолинейное равномерное движение

Прямолинейное равномерное движение – это такое движение, при котором точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения. Характеристикой этого движения является постоянная скорость

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \tag{1.2}$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение, совершенное за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$.

Полагая $t_0 = 0$, получаем, что

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{t} \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{v}t \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = v_x t, \\ y - y_0 = v_y t, \\ z - z_0 = v_z = v_z t, \end{cases}$$

где $(x - x_0); (y - y_0); (z - z_0)$ – координаты вектора перемещения, а v_x, v_y, v_z - проекции (координаты) вектора скорости $\vec{v}$. Из последней системы можно определить координаты равномерно движущейся точки

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t, \\ y(t) = y_0 + v_y t, \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases}$$

и сделать вывод, что они изменяются по линейному закону в зависимости от времени. Во многих случаях для описания прямолинейного движения можно ограничиться одной осью координат, направив ее вдоль прямой, по которой движется материальная точка. Тогда y и z равны 0 и в системе остается только одно уравнение:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_x t,} \tag{1.3}$$

где $\boxed{v_x = \text{const}}$ (1.4)

Для равномерного прямолинейного движения модуль вектора перемещения и пройденный путь S совпадают, поэтому в соответствии с формулой (1.2)

$$\boxed{S = vt} \tag{1.5}$$

где v – модуль скорости.

На рис. 1.2 и 1.3 приведены графики зависимости проекции скорости и координаты от времени для материальной точки, совершающей прямолинейное равномерное движение. Графики построены для $v_x > 0$ и $x_0 > 0$.

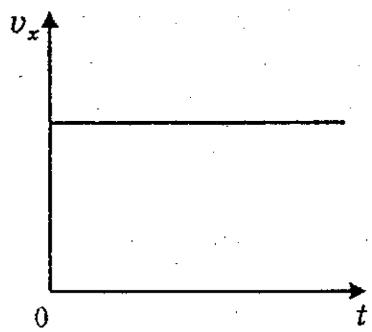


Рис. 1.2

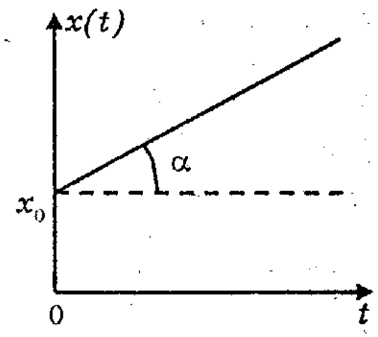


Рис. 1.3

Из свойств линейной функции следует, что тангенс угла α, образуемого прямой $x(t) = x_0 + v_x t$ с осью абсцисс $0t$, равен проекции скорости

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = v_x} \qquad (1.6)$$

1.3. Неравномерное движение

При неравномерном прямолинейном движении материальной точки существуют такие равные промежутки времени, за которые точка совершает неравные перемещения. При неравномерном движении нельзя говорить о постоянной скорости. Характеристикой неравномерного движения является вектор средней скорости $\bar{v}_{ср}$, определяемый как

$$\boxed{\bar{v}_{ср} = \Delta r / t} \qquad (1.7)$$

где $\Delta\bar{r}$ – перемещение, совершенное за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t$ (при $t_0 = 0$).

При решении некоторых задач используется понятие средней скорости на всем пути (средняя путевая скорость)

$$\boxed{v_{ср} = S / t} \qquad (1.8)$$

где S – пройденный путь за промежуток времени t.

Средняя скорость на всем пути является скалярной величиной. Формулы (1.7) и (1.8) определяют разные физические величины, что можно проиллюстрировать следующим примером: тело, брошенное вертикально вверх, поднялось на высоту H, полное время падения на землю оказалось равным T. В данном случае определяемая формулой (1.7) средняя скорость $\bar{v}_{ср} = 0$, так как вектор перемещения при возвращении тела в исходную точку равен 0. Средняя скорость на всем пути, определяемая формулой (1.8) $v_{ср} = 2H / T$, так как пройденный телом путь $S = 2H$.

При неравномерном движении скорость в данный момент времени или в данной точке траектории называют **мгновенной скоростью**. Мгновенную скорость находят как предел отношения перемещения, совершенного за бесконечно малый промежуток времени Δt к этому бесконечно малому промежутку времени.

$$\boxed{\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}(\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \bar{r}'(t)} \qquad (1.9)$$

т. е. вектор мгновенной скорости – это производная по времени от вектора $\bar{r}(t)$, задающего положение материальной точки на траектории (рис. 1.1).

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения точки. Вектор скорости $\bar{v}$ определяется тремя проекциями (координатами) v_x, v_y, v_z, т.е. $\bar{v}(v_x; v_y; v_z)$. Проекции вектора $\bar{r}$ равны x, y, z, т.е. $\bar{r}(x; y; z)$. Векторное равенство (1.9) равносильно системе:

$$\boxed{v_x = x'(t), v_y = y'(t), v_z = z'(t)} \qquad (1.10)$$

Другими словами: проекция мгновенной скорости есть производная по времени от соответствующей координаты.

Модуль вектора скорости $\bar{v}(v_x; v_y; v_z)$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad (1.11)$$

В общем случае скорость точки изменяется во времени. Быстроту изменения скорости характеризует вектор ускорения.

$$\boxed{\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}(\Delta t)}{\Delta t} = \bar{v}'(t)} \qquad (1.12)$$

где $\Delta\bar{v}$ – изменение скорости за промежуток времени Δt, т.е. вектор ускорения есть производная от вектора мгновенной скорости по времени. С учетом того, что проекции вектора ускорения равны a_x, a_y, a_z, а проекции вектора скорости равны v_x, v_y, v_z, получаем систему

$$\boxed{a_x = v_x'(t), a_y = v_y'(t), a_z = v_z'(t)} \qquad (1.13)$$

Таким образом, проекция ускорения есть производная по времени от соответствующей проекции скорости. Из формул (1.12) и (1.13) следует, что проекция ускорения есть вторая производная от координаты по времени:

$$\boxed{a_x = x''(t), a_y = y''(t), a_z = z''(t)} \qquad (1.14)$$

Модуль вектора ускорения $\bar{a}(v_x; v_y; v_z)$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (1.15)$$

1.4. Равнопеременное движение

Равнопеременным называется движение, в котором скорость за любые равные промежутки времени изменяется одинаково. Из определения следует, что вектор изменения скорости $\Delta\bar{v}$ направлен вдоль одной прямой, т.е. траекторией движения является прямая. Характеристикой равнопеременного движения является постоянное ускорение

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{t} = \text{const}} \qquad (1.16)$$

где $\bar{v}_0$ – начальная скорость, $(\bar{v} - \bar{v}_0)$ - изменение скорости за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t(t_0 = 0)$. Из формулы (1.16) следует, что скорость при равнопеременном движении изменяется по линейному закону от времени.

$$\boxed{\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t} \qquad (1.17)$$

Если координатную ось X направить вдоль прямой, по которой движется точка, то для проекций ускорения a_x и скорости v_x на эту ось получим формулы:

$$\boxed{a_x = \text{const}} \qquad (1.18)$$

$$\boxed{v_x(t) = v_{0x} + a_x t} \qquad (1.19)$$

где v_{0x} – проекция начальной скорости.

Согласно формуле (1.10) $v_x = x'(t)$, т.е. $x(t)$ – первообразная функция $v_x(t)$. Поэтому

$$x(t) = \int v_x(t)dt + x_0 = \int (v_{0x} + a_x t)dt + x_0 =$$

$$= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Итак, в равнопеременном движении координата изменяется по квадратичному закону от времени:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}} \qquad (1.20)$$

где x_0 – начальная координата материальной точки.

Из формул (1.19) и (1.20) можно получить соотношение между проекцией скорости и координатой в равнопеременном движении. Из (1.19) $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$, подставляя в (1.20), получаем:

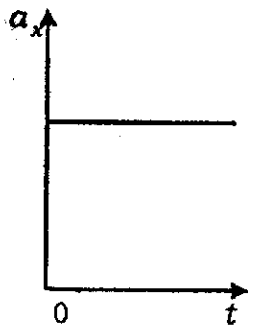


Рис. 1.4

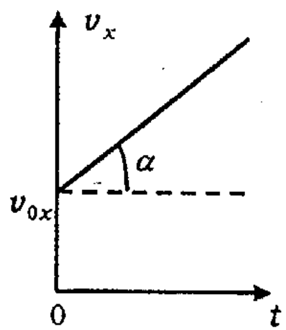


Рис. 1.5

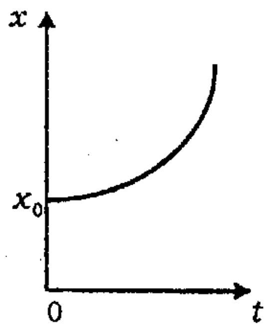


Рис. 1.6

$$\boxed{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0)} \qquad (1.21)$$

где $(x - x_0)$ - проекция вектора перемещения.

На рис. 1.4, 1.5, 1.6, представлены графики зависимостей проекции ускорения, скорости и координаты от времени.

Графики построены для $a_x > 0, \upsilon_{0x} > 0, x_0 > 0$.

Из свойств линейной функции следует, то тангенс угла α, образуемого прямой $\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t$ с осью абсцисс (рис. 1.5.), равен проекции ускорения:

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = a_x} \qquad (1.22)$$

График зависимости координаты от времени в равнопеременном движении – парабола (рис. 1.6.)

Частными случаями равнопеременного движения являются равноускоренное и равнозамедленное движения. При равноускоренном движении вектор мгновенной скорости и вектор ускорения сонаправлены $\vec{\upsilon}(t) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Следствием этого является возрастание модуля скорости (рис. 1.7).

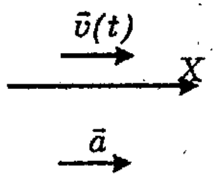


Рис. 1.7

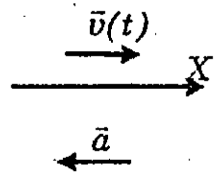


Рис. 1.8

При равнозамедленном движении вектор мгновенной скорости и вектор ускорения противоположно направлены $\vec{\upsilon}(t) \downarrow\uparrow \vec{a}$. Следствием этого является убывание модуля скорости (рис. 1.8).

В обоих этих случаях модуль вектора перемещения равен пройденному пути. В общем случае равнопеременного движения модуль вектора перемещения отличается от пройденного пути.

1.5. Движение тела, брошенного вертикально

Вблизи своей поверхности Земля сообщает телам одинаковое ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз (ускорение свободного падения). Его модуль g =9,81 м/с^2.

Если тело падает вертикально вниз без начальной скорости, то такое движение называют свободным падением. Для описания свободного падения можно (хотя это и необязательно) ввести ось координат, направленную вертикально вниз, а ее начало

поместить в начальную точку движения (рис. 1.9). Тогда $x_0 = 0, \upsilon_{0x} = 0, a_x = g$ и законы движения запишутся в следующем виде:

$$\upsilon_x(t) = gt, \qquad (1.23)$$

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.24)$$

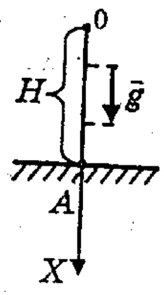


Рис. 1.9

Пусть тело свободно падает с высоты H. Используя законы движения, выражаемые формулами 1.23 и 1.24, определим время падения и конечную скорость. Координата точки падения (точка A на рис. 1.9) $x_A = H$. С другой стороны, ее можно выразить по формуле 1.24. Получаем уравнение:

$$x_A = H = gt^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/g}.$$

Конечную скорость находим по формуле 1.23:

$$\upsilon_A = gt = g\sqrt{2H/g} = \sqrt{2gH}.$$

Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$, то для описания такого движения удобно ввести ось координат, направленную вертикально вверх с началом в точке бросания (рис. 1.10).

Тогда $x_0 = 0, \upsilon_{0x} = \upsilon_0, a_x = -g$ и законы движения запишутся в следующем виде:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 - gt, \qquad (1.25)$$

$$x(t) = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.26)$$

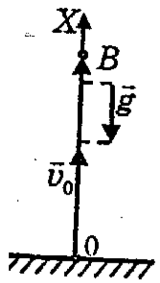


Рис. 1.10

Уравнения (1.25) и (1.26) описывают движение тела не только при его движении вверх, но и при его падении вниз. Связано это с тем, что ускорение тела на всем пути равно $\vec{g}$. Причем ни модуль ускорения, ни его направление не изменяются. Поэтому нет необходимости, изучая движение тела, брошенного вертикально вверх, рассматривать сначала движение вверх, а затем вниз.

Точка B – точка максимального подъема, в ней скорость $v_x = 0 \Rightarrow v_0 - gt_B = 0$, где t_B - время движения до точки B. $t_B = v_0 / g$.

При падении тела на землю его координата:
$x = 0 \Rightarrow v_0 t_n - gt_n / 2 = 0$, где t_n – полное время движения, $\Rightarrow t_n(v_0 - gt_n / 2) = 0 \Rightarrow t_n = 0$,
или $t_n = 2v_0 / g$. Корень $t_n = 0$ не подходит по смыслу задачи. Сравнивая полное время движения $t_n = 2v_0 / g$ со временем подъема тела $t_B = v_0 / g$, получаем, $t_n = 2t_B \Rightarrow$ **время подъема тела равно времени падения.**

Из уравнения (1.25) нетрудно найти конечную скорость тела

$$v_к(t) = v_0 - gt_n = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0.$$

Модуль конечной скорости равен модулю начальной.

Для определения максимальной высоты подъема можно воспользоваться формулой (1.20):

$$H = y_B = v_0 t_B = v_0 \cdot (v_0 / g) - g / 2(v_0 / g)^2 = v_0^2 / 2g.$$

Но можно определить иначе, воспользовавшись формулой (1.21). Вектор перемещения $\overrightarrow{OB}$ имеет проекцию на ось X, равную $x_B - x_0 = H$, следовательно

$$v_B^2 - v_0^2 = -2g(x_B - x_0) \Rightarrow 0^2 - v_0^2 = -2gH \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

1.6. Движение тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли. Его удобно разложить на два независимых прямолинейных движения, происходящих в горизонтальном и вертикальном направлениях X и Y (рис. 1.11).

Так как проекции ускорения $\bar{g}$ равны $a_x = 0$ и $a_y = -g$, то в горизонтальном направлении тело движется равномерно, а в вертикальном – равнопеременно. В выбранной системе коорди-

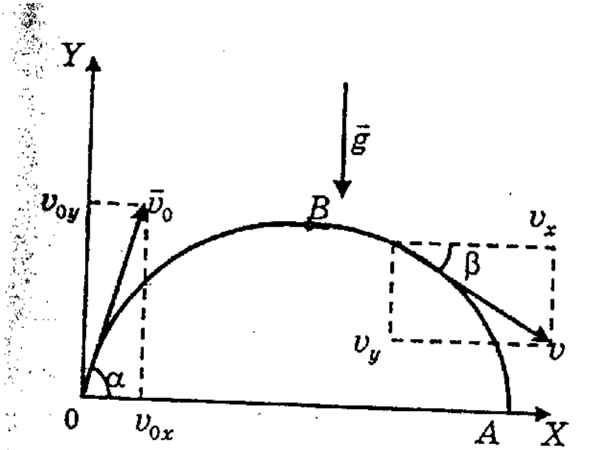


Рис. 1.11

нат начальные координаты $x_0 = 0, y_0 = 0$, а начальные скорости

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$,

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

Законы движения в горизонтальном направлении записываются в виде:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0\cos\alpha, \qquad (1.27)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = (v_0\cos\alpha)t. \qquad (1.28)$$

Законы движения в вертикальном направлении:

$$v_y(t) = v_{0y}t + a_y t = v_0\sin\alpha - gt, \qquad (1.29)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 = v_0\sin\alpha - gt^2/2. \qquad (1.30)$$

Выразив из (1.27) $t = x / v_0\cos\alpha$ и подставив в (1.28), получим уравнение траектории:

$$y(x) = v_0\sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Так как y есть квадратичная функция от x, то траектория движения – парабола.

В точке падения A $y_A = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha\, t_A - \frac{gt_A^2}{2} = 0$,

где t_A – полное время движения тела. Решая это уравнение, находим, что

$$t_A = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}. \qquad (1.31)$$

Горизонтальная дальность полета

$$L = x_A = v_0\cos\alpha\, t_A = v_0\cos\alpha\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \qquad (1.32)$$

В точке максимального подъема

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0\sin\alpha - gt_B = 0,\ \Rightarrow t_B = \frac{v_0\sin\alpha}{g},$$

где t_B – время движения до точки B.

Сравнивая с полным временем движения t_A, находим что, $t_A = 2t_B$. Следовательно, время подъема тела равно времени падения.

Максимальная высота подъема

$$H = y_B = v_0\sin\alpha\, t_B - gt_B^2/2 =$$

$$= v_0\sin\alpha\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 = \left(\frac{v_0\sin\alpha}{2g}\right)^2. \qquad (1.33)$$

Вектор полной скорости $\bar{v}$ в любой точке траектории имеет проекции v_x и v_y, т.е. $\bar{v} = \bar{v}(v_x; v_y)$. Поэтому модуль полной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (1.34)$$

В частности, в точке падения A $v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha$, а $v_y = v_0\sin\alpha - gt_A = -v_0\sin\alpha$, поэтому $v_A = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (-v_0\sin\alpha)^2} = v_0$. Итак, модули конечной и начальной скоростей равны.

Острый угол β, который образует вектор скорости $\bar{v}$ с горизонтом в любой точке траектории, может быть найден по одной из формул:

$$\mathrm{tg}\beta = |v_y| / v_x,\ \sin\beta = |v_y / v|,\ \cos\beta = v_x / v. \qquad (1.35)$$

1.7. Относительность движения. Закон сложения скоростей

Движение тела можно изучать в различных системах отсчета. Рассмотрим неподвижную систему отсчета и систему отсчета, которая движется относительно неподвижной. Скорость тела можно выразить, используя классический закон сложения скоростей:

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\upsilon} + \bar{v}_{\text{отн}}} \qquad (1.36)$$

где $\bar{v}$ – скорость тела относительно неподвижной системы отсчета, $\bar{\upsilon}$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной, $\bar{v}_{\text{отн}}$ – скорость тела относительно подвижной системы отсчета. Классический закон сложения скоростей используется при скоростях, много меньших скорости света $c = 3\cdot10^8$ м/с.

Как и скорость, кинематические характеристики движения (траектория, перемещение, пройденный путь, ускорение) зависят от того, в какой системе отсчета рассматривается движение. **Существуют, однако, системы отсчета (инерциальные), в которых ускорение не изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.**

1.8. Примеры решения задач

Задача 1.1. Капли дождя, падающие вертикально, попадают на стекло окна вагона, движущегося со скоростью u=36 км/ч, и оставляют на нем след под углом 60^0 к вертикали. Определить скорость падения капель v.

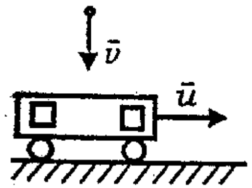


Рис. 1.12

Решение.

Рассмотрим движение капли в системе отсчета, связанной с движущимся вагоном (рис. 1.12). Пусть $\bar{v}_{\text{отн.}}$ – скорость капли в этой подвижной системе отсчета. Используя закон сложения скоростей, получим:

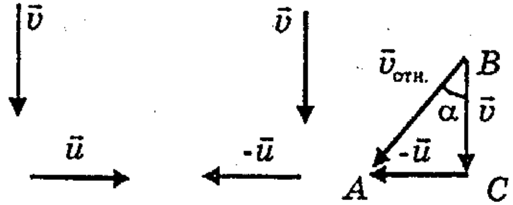


Рис. 1.13

$\bar{v} = \bar{v} + \bar{v}_{отн} \Rightarrow \bar{v}_{отн} = \bar{v} - \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v})$.

Построим вектор $\bar{v}_{отн.}$ (рис. 1.13).

Итак, в системе отсчета, связанной с вагоном, капля имеет скорость $\bar{v}_{отн.}$, направленную под углом α к вертикали. Модули векторов $\bar{u}$ и $-\bar{u}$ равны, поэтому из ΔABC:

$v = u / \mathrm{tg}\alpha$ = 20,8 км/ч =5,8 м/с.

Задача 1.2. Материальная точка совершает два последовательных перемещения. Вектор первого перемещения направлен под углом $\alpha_1 = 30^0$ к оси OX, причем на этом участке точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью v_1=10 м/с. Вектор второго перемещения направлен под углом $\alpha_2 = 90^0$ к оси OX и его модуль вдвое больше модуля первого перемещения. Движение на втором участке прямолинейное равномерное со скоростью v_2=20 м/с. Найти среднюю скорость перемещения и среднюю скорость на всем пути.

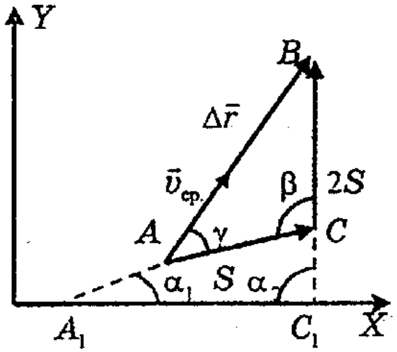


Рис. 1.14

Решение.

На рис. 1.14 изображено движение точки. $\overline{AC}$ – первое перемещение, $\overline{CB}$ – второе перемещение. Вектор полного перемещения $\Delta\bar{r} = \overline{AB}$. Найдем его модуль. $\angle ACB = \beta$ – внешний угол ΔA_1C_1C, поэтому он равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Итак, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = 120^0$. Пусть модуль первого перемещения $AC = S$, тогда модуль второго перемещения $BC = 2S$. Из ΔACB по теореме косинусов

$$\Delta r = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\beta} =$$

$$= \sqrt{S^2 + (2S)^2 - 2 \cdot S \cdot 2S \cdot \cos 120^0} =$$

$$= \sqrt{S^2 + 4S^2 - 4S^2 \cdot (-0{,}5)} = S\sqrt{7}.$$

Так как движение на участке AC равномерное, то время, за которое совершено перемещение $\overline{AC}$, равно $t_1 = S / v_1$. Время, за которое совершено перемещение $\overline{CB}$, равно $t_2 = 2S / v_2$. Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = S / v_1 + 2S / v_2 = S(2v_1 + v_2) / v_1 v_2.$$

По определению средняя скорость перемещения $\bar{v}_{ср.} = \Delta\bar{r} / t$, а ее модуль

$$v_{ср} = \frac{\Delta r}{t} = \left(S\sqrt{7}\right) \Big/ \left(\frac{S(2v_1 + v_2)}{v_1 v_2}\right) = \frac{\sqrt{7} v_1 v_2}{2v_1 v_2} = 13{,}2 \text{ м/с}.$$

Найдем направление вектора $\bar{v}_{ср.}$. Он образует угол γ с вектором $\overline{AC}$. Из ΔABC по теореме синусов

$$2S/\sin\gamma = \Delta r/\sin\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = 2S\sin\beta/\Delta r = (2S/S\sqrt{7})\sin 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \arcsin\sqrt{3/7} = 25{,}4^0.$$

Угол, который образует вектор средней скорости с осью OX, равен $\gamma + \alpha_1 = 55{,}4^0$.

Средняя скорость v на всем пути есть весь пройденный путь, отнесенный к полному времени движения, поэтому

$$v = \frac{S + 2S}{t} = \frac{3S}{t} = 3S \Big/ \left(\frac{S(2v_1 + v_2)}{v_1 v_2}\right) = \frac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = 15 \text{ м/с}.$$

Задача 1.3. Тело, двигаясь равноускоренно, за пятую секунду от начала движения проходит S=45,5 м. Определить модуль перемещения тела за 5 с и его скорость в конце пятой секунды. Начальная скорость тела равна 0.

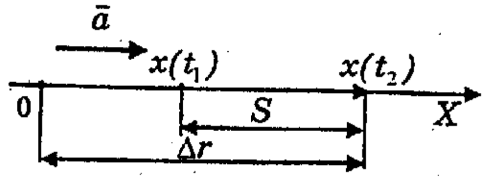


Рис. 1.15

Решение.

Направим координатную ось X вдоль прямой, по которой двигается тело (рис. 1.15). Начало координатной оси поместим в начальную точку движения. Тогда получаем, что $a_x = a$, $x_0 = 0$, $\upsilon_{0x} = 0$. Законы движения запишутся в виде: $\upsilon(t) = at$, $x(t) = at^2/2$.

Пусть $t_1 = 4$ с, координата тела в момент времени t_1 $x(t_1) = at_1^2/2$. Координата в момент времени $t_2 = 5$ с $x(t_2) = at_2^2/2$. Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$x(t_2) - x(t_1) = at_2^2/2 - at_1^2/2 = a(t_2^2 - t_1^2)/2.$$

Из рис. 1.15 следует, что $x(t_2) - x(t_1) = S$, (S – путь, пройденный за пятую секунду).

$$S = a(t_2^2 - t_1^2)/2 \Rightarrow a = 2S/(t_2^2 - t_1^2).$$

Найдем $x(t_2) = x_0 + \dfrac{St_2^2}{t_2^2 - t_1^2}$. Из чертежа видно, что $x(t_2) = \Delta r$, где Δr – модуль перемещения за 5 с. Итак,

$$\Delta r = St_2^2/(t_2^2 - t_1^2) = 126{,}4 \text{ м}.$$

Скорость в конце пятой секунды

$$\upsilon = \upsilon(t_2) = at_2 = St_2/(t_2^2 - t_1^2) = 50{,}6 \text{ м/с}.$$

Задача 1.4. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, попадает в преграду и проникает в нее на глубину 32 см. Найти ускорение и время движения пули внутри преграды. На какой глубине скорость пули уменьшится в 4 раза? Движение пули считать равнопеременным (рис. 1.16).

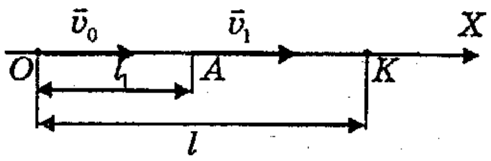


Рис. 1.16

Решение.

Направим координатную ось X вдоль прямой, по которой движется тело, ее начало поместим в начальную точку движения (рис. 1.16).

Пусть υ_0 – начальная скорость пули, K – конечная точка движения пули, тогда $a_x = \text{const}$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $x_0 = 0$. По условию задачи движение пули равнопеременное, применим формулу (1.21) на участке OK: $\upsilon_K^2 - \upsilon_0^2 = 2a_x(x_K - x_0)$, где $\upsilon_K = 0$, $x_K - x_0 = l$, (l -путь, пройденный пулей до остановки). Получаем:

$$-\upsilon_0^2 = 2a_x l \Rightarrow a_x = -\upsilon_0^2/2l = -2{,}5 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Знак минус у проекции ускорения означает, что вектор ускорения направлен против оси X. Скорость пули изменяется по формуле $\upsilon_x(t) = \upsilon_0 + a_x t$. Так как $\upsilon_K = 0$, то $0 = \upsilon_0 + a_x t_K$, где t_K – время движения пули. Находим:

$t_n = -\upsilon_0/a_x = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ с. В точке A $\upsilon(t) = \upsilon_1 = \upsilon_0/4$. Применяя еще раз формулу (1.21), получим

$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = 2a_x(x_A - x_0)$, причем $x_A - x_0 = l_1$. Поэтому

$(\upsilon_0/4)^2 - \upsilon_0^2 = 2a_x l_1 \Rightarrow l_1 = -15\upsilon_0^2/32a_x = 0{,}3$ м.

Задача 1.5. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии l=0,3 м от начальной точки движения шарик побывал дважды: через t_1 = 1 с и через t_2 = 2 с после начала движения. Определить начальную скорость и ускорения движения шарика, считая его постоянным (рис. 1.17).

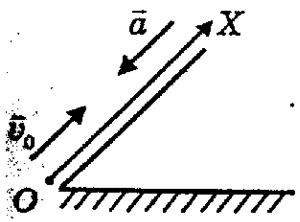


Рис. 1.17

Решение.

Пусть $\bar{\upsilon}_0$ – начальная скорость шарика, $\bar{a}$ – его ускорение. Координата шарика будет изменяться по закону

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + a_x t^2/2,$$

где $a_x = -a$, начальная координата $x_0 = 0$.

Тогда $x(t) = v_0 t - at^2/2$. При $x(t) = l$ получим квадратное уравнение: $l = v_0 t - at^2/2$ (I), которое, как это следует из условия задачи, будет иметь корни t_1 и t_2. Перепишем (I) в стандартном виде: $t^2 - 2v_0 t/a + 2l/a = 0$.

По теореме Виета $t_1 + t_2 = 2v_0/a$ (2) и $t_1 t_2 = +2l/a$ (3). Из уравнения (3): $a = 2l/t_1 t_2 = 0{,}3$ м/с². Из уравнения (2): $v_0 = a(t_1 + t_2)/2 = 0{,}45$ м/с.

Задача 1.6. Тело начинает двигаться из точки O без начальной скорости по прямой с постоянным ускорением a. Через промежуток времени τ после начала движения тело оказывается в точке B, причем в ней происходит изменение направления ускорения на противоположное, а его модуль возрастает вдвое. Через какое время после начала движения тело окажется в точке C, лежащей по другую сторону от начальной точки движения O, такой, что $OB = OC$?

Решение.

Сделаем чертеж, иллюстрирующий условие задачи (рис. 1.18).

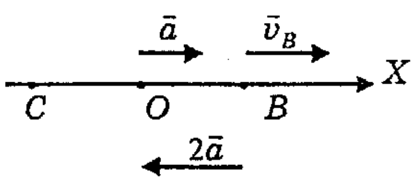


Рис. 1.18

Направим координатную ось X вдоль прямой, по которой движется тело, как показано на рис. 1.18. Ее начало поместим в точку O, следовательно начальная координата $x_0 = 0$. Запишем законы движения на участке OB. Так как проекция ускорения $a_x = a$ и $v_0 = 0$, то $v(t) = at$, $x(t) = at^2/2$. В момент времени $t = \tau$ тело окажется в точке B, его скорость $v_B = a\tau$, а его координата $x_B = a\tau^2/2$. Несмотря на то, что в точке B ускорение изменяет направление, тело еще некоторое время продолжит свое движение в прежнем направлении, двигаясь равнозамедленно. После того, как скорость тела обратится в 0, оно начнет двигаться в обратном направлении.

В точке B естественно начать новый отсчет времени. Проекция ускорения $a_x = -2a$, начальная координата – x_B, начальная скорость – v_B. Закон движения тела

$$x(t) = x_B + v_B t + a_x t^2/2 = a\tau^2/2 + a\tau t - 2at^2/2 =$$
$$= a\tau^2/2 + a\tau t - at^2 \quad (*).$$

Когда тело окажется в точке C, его координата $x_C = -x_B = -a\tau^2/2$. Формула (*) выражает координату тела в любой момент времени при движении с ускорением $a_x = -2a$, в том числе и координату точки C. Поэтому можно составить уравнение $a\tau^2/2 + a\tau t - at^2 = -a\tau^2/2$, где t – время движения на участке от B к C. Перенося все члены в одну часть и сокращая на $a \neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно t: $t^2 - \tau t - \tau^2 = 0$. Его дискриминант $D = \tau^2 - 4(-\tau^2) = 5\tau^2$, а его корни

$t_{1,2} = (\tau \pm \tau\sqrt{5})/2 = \tau(1 \pm \sqrt{5})/2$. Здесь $t_2 < 0$, что не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t = t_1 = \tau(1 + \sqrt{5})/2$.

Тело окажется в точке C через время $t_1 + \tau = \tau(1 + \sqrt{5})/2 + \tau = \tau(3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}6\tau$ после начала движения.

Задача 1.7. За последнюю секунду свободно падающее тело пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело и с какой высоты (рис. 1.19)?

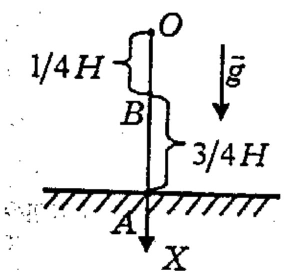


Рис. 1.19

Решение.

Для описания свободного падения воспользуемся формулами (1.23) и (1.24). Получаем, что $v_x(t) = gt$ и $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}$. Пусть t_n – полное время движения тела, тогда

$$x_A = H = gt_n^2/2.$$

Время движения до точки B равно $(t_n - \Delta t)$, где $\Delta t = 1$с. Так как $x_B = H/4$, то получаем $H/4 = g(t_n - \Delta t)^2/2$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} H = gt_n^2/2, \\ H/4 = g(t_n - \Delta t)^2/2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = gt_n^2/2, \\ H = 2g(t_n - \Delta t)^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gt_n^2/2 = 2g(t_n - \Delta t)^2 \Rightarrow t_n^2/(t_n - \Delta t)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_n/(t_n - \Delta t) = 2 \Rightarrow t_n = 2(t_n - \Delta t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_n = 2\Delta t\, ; t_n = 2 \text{ с}.$$

Искомая высота $H = gt_n^2/2 = 19{,}6$ м.

Задача 1.8. Аэростат поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с². Через $\tau = 5$ с от начала его движения из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Начальная скорость аэростата равна 0 (рис. 1.20).

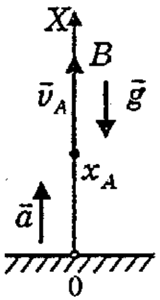


Рис. 1.20

Решение.

Так как аэростат движется равноускоренно, то его скорость и координата выражаются формулами:

$$v(t) = v_0 + at = at;$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2 = at^2/2.$$

Через время $\tau = 5$с аэростат, а вместе с ним и предмет, будут иметь скорость $v_A = a\tau$ и координату $x_A = a\tau^2/2$. Предмет далее движется в поле тяжести с постоянным ускорением $\bar{g}$, проекция которого на ось X $a_x = -g$. Время удобно отсчитывать от момента, когда предмет выпал из аэростата. Тогда v_A и x_1 – это начальные скорость и координата предмета. Используя формулу (1.20), запишем закон движения предмета:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - gt^2/2 = x_A + v_A t - gt^2/2 =$$
$$= a\tau^2/2 + a\tau t - gt^2/2.$$

В тот момент, когда предмет упал на Землю, его координата $x = 0$, а время движения – t_n. Получаем уравнение

$$0 = a\tau^2/2 + a\tau t_n - gt^2/2 \Rightarrow gt_n^2 - 2a\tau t_n - a\tau^2 = 0,$$

$$D/4 = (a\tau)^2 + ag\tau^2 = (a\tau)^2(1 + g/a).$$

Корни квадратного уравнения:

$$t_n = (a\tau \pm a\tau\sqrt{1 + g/a})/g = \tau(a/g)(1 \pm \sqrt{1 + g/a}).$$

Так как $t_n > 0$, то время движения предмета

$$t_n = \tau(a/g)(1 + \sqrt{1 + g/a});\ t_n \approx 3{,}4 \text{ с}.$$

Задача 1.9. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз с высоты H. Найти эти скорости, если известно, что к моменту встречи один из мячей пролетел путь $1/3\,H$ (рис. 1.21).

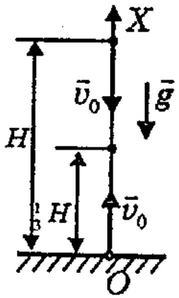


Рис. 1.21

Решение.

Мяч, брошенный с поверхности земли, до точки встречи движется равнозамедленно, поэтому он проходит путь $1/3\,H$. Несмотря на то, что другой мяч движется равноускоренно, ускорения обоих мячей одинаковы и равны вектору $\bar{g}$.

Введем вертикальную координатную ось X, ее начало поместим на поверхности земли. Для мяча, находившегося на земле:

$$a_x = -g,\ v_{0x} = v_0,\ x_0 = 0,$$ поэтому

его координата изменяется по закону $x(t) = v_0 t - gt^2/2$. Для мяча, находившегося на высоте H, в той же системе координат, $a_x = -g$, $v_{0x} = -v_0$, $x_0 = H$. Его координата выражается формулой

$$x(t) = H - v_0 t - gt^2/2.$$

В момент встречи пути, пройденные мячами, различны, однако их координаты одинаковы и равны $1/3\,H$. По условию задачи время движения мячей до точки встречи одинаково. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1/3\,H = v_0 t - gt^2/2, \\ 1/3\,H = H - v_0 t - gt^2/2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$2/3\,H = H - gt^2$. Время движения до встречи $t = \sqrt{H/3g}$. Из первого уравнения системы находим

$$v_0 = \frac{1/3\,H + gt^2/2}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{3gH}.$$

Задача 1.10. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии от основания башни он упадет? Какова его конечная скорость? Какой угол образует вектор конечной скорости с горизонтом?

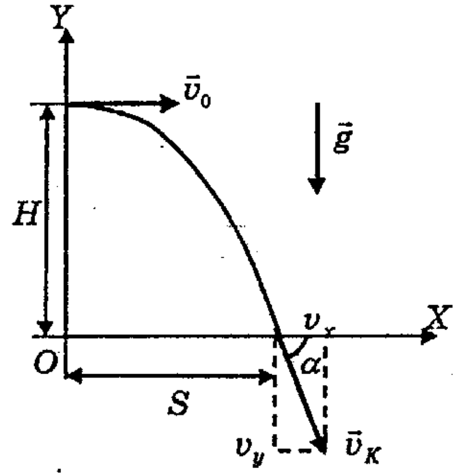


Рис. 1.22

Решение.

В любой точке траектории на камень действует сила тяжести, которая сообщает ему ускорение свободного падения $\vec{g}$. Движение камня раскладываем на два независимых прямолинейных движения, происходящих в горизонтальном OX и вертикальном OY направлениях. Начало координатной системы O находится на поверхности земли у основания башни (рис. 1.22)

Проекция ускорения $\vec{g}$ на ось OX равна 0, поэтому в горизонтальном направлении камень движется прямолинейно равномерно. Проекция ускорения $\vec{g}$ на ось OY $g_y = -g = \text{const}$, поэтому движение в вертикальном направлении является равнопеременным (равноускоренным). В выбранной координатной системе начальные координаты камня

$x_0 = 0$, $y_0 = H$, начальные скорости $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Законы равномерного движения в горизонтальном направлении записываются в виде: $v_x(t) = v_{0x} = v_0$, $x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0 t$. Законы движения в вертикальном направлении: $v_y(t) = v_{0y}t + g_y t = -gt$,

$y(t) = y_0 + v_{0y}t + g_y t^2/2 = H - g\,t^2/2$.

В точке падения камня его координата y обращается в 0, получаем уравнение: $H - g\,t^2/2 = 0$, где t – время падения. Из последнего уравнения находим, что $H = g\,t^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/g}$.

Из рис. 1.22 следует, что расстояние S от основания башни до точки падения равно координате x точки падения

$$S = x = v_0 t = v_0\sqrt{2H/g} = 22{,}6 \text{ м}.$$

Вектор конечной скорости $\vec{v}_к$ направлен по касательной к траектории, его проекция на горизонтальное направление $v_x = v_0$. Проекция на вертикальное направление:

$$v_y = -gt = -g\sqrt{2H/g} = -\sqrt{2gH}.$$

Модуль $v_к = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 24{,}3$ м/с. Для определения угла α из прямоугольного треугольника найдем $\cos\alpha = v_x/v_к = v_0/v_к \Rightarrow \alpha = \arccos v_0/v_к = \arccos 0{,}41 = 65{,}8^0$.

Задача 1.11. На горе с углом наклона α к горизонту бросают мяч с начальной скоростью v_0 перпендикулярно склону горы. Найти время полета мяча. На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч?

Решение.

Для решения задачи можно сложное движение разложить на движение в горизонтальном и вертикальном направлениях и ввести систему координат, изображенную на рис. 1.22. Однако в этой и подобных задачах более удобно вводить систему координат, показанную на рис. 1.23. Тогда, $a_x = g\sin\alpha$,

$a_y = -g\cos\alpha$, т.е. движения вдоль X и Y оказываются равно-

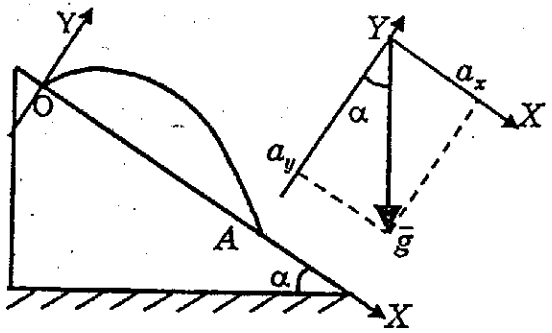


Рис. 1.23

переменными. Законы движения запишутся в виде:

$x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = (g\sin\alpha t^2)/2$

$(x_0 = 0$ и $v_{0x} = 0)$,

$y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 = v_0 t - (g\cos\alpha t^2)/2$

$(y_0 = 0$ и $v_{0y'} = v_0)$.

В точке падения A $y_A = 0 \Rightarrow v_0 t_n - (g\cos\alpha t_n^2)/2 = 0$, где t_n – время полета мяча.

$t_n(v_0 - g\cos\alpha t_n/2) = 0 \Rightarrow t_n = 2v_0/g\cos\alpha$.

Расстояние от точки бросания до точки падения

$AO = x_A = g\sin\alpha t_n^2/2 =$

$= g\sin\alpha \cdot (2v_0/g\cos\alpha)^2/2 = 2v_0^2\sin\alpha/g\cos^2\alpha$.

Задача 1.12. Небольшое тело скользит со скоростью $v = 10$ м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели. Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии $d = 0{,}05$ м друг от друга. Глубина щели $H = 1$ м. Определить, сколько раз ударится тело о стенки, прежде чем упадет на дно. Удар о стенку абсолютно упругий (т.е. при ударе модуль скорости не меняется и угол отражения равен углу падения) (рис. 1.24).

Решение.

Ускорение в направлении X: $a_x = 0$, а в направлении Y: $a_y = -g$. Начальные условия задачи: $x_0 = 0$; $y_0 = H$; $v_{0x} = v$; $v_{0y} = 0$. Из свойств абсолютно упругого удара следует, что при каждом ударе v_x остается постоянной по модулю, изменяя лишь знак, а v_y вообще не изменяется. Таким образом, в вертикальном направлении тело свободно падает, а в горизонтальном направлении движется с постоянной по модулю скоростью v. Для оси Y имеем:

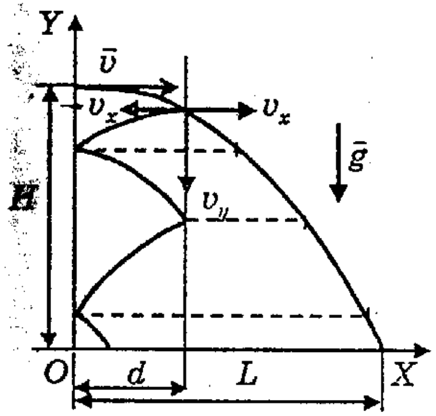


Рис. 1.24

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 = H - gt^2/2.$$

При падении $y(t) = 0$, поэтому время падения шарика $t_n = \sqrt{2H/g}$. За это время тело в горизонтальном направлении пройдет путь $L = vt_n = v\sqrt{2H/g}$. С другой стороны, $L = dN$, где N – число столкновений тела со стенками, поэтому $dN = v\sqrt{2H/2} \Rightarrow N = \dfrac{v}{d}\sqrt{2H/g} \approx 89$.

Задача 1.13 Дан график зависимости скорости тела от времени. Движение прямолинейное (рис. 1.25). Построить графики зависимости ускорения, координаты и пройденного пути от времени. Начальная координата тела равна 0.

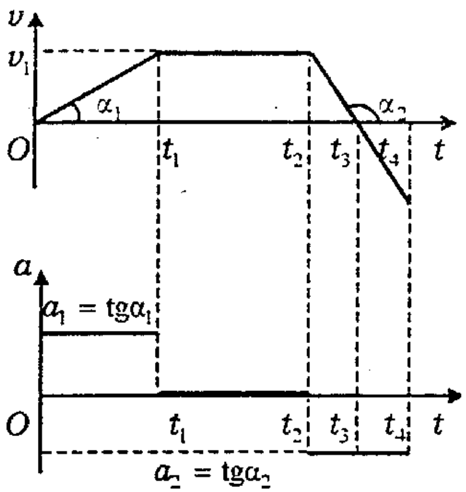


Рис. 1.25

Решение.

При $t \in [0, t_1]$ скорость изменяется по линейному закону $v(t) = v_0 + a_1 t$, где $v_0 = 0$ и $a_1 = \text{tg}\alpha_1 = \text{const} > 0$. Следовательно, движение является равнопеременным. При $t \in [t_1; t_2]$ $v_1 = \text{const}$ (равномерное движение) и $a_2 = 0$. При $t \in [t_2; t_4]$ зависимость скорости от времени линейная. Если за начало отсчета времени принять момент времени t_2, то эта зависимость может быть представлена в виде $v(t) = v_1 + a_3 t$, где $a_3 = \text{tg}\alpha_3 = \text{const} < 0$ (так как $\alpha_2 > \pi/2$). Зависимость $a(t)$ представлена на рис. 1.25. Построим график зависимости $x(t)$. При $t \in [0; t_1]$ $x(t) =$ $= x_0 + v_0 t + a_1 t^2/2 = a_1 t^2/2$ – парабола. При $t \in [t_1; t_2]$ $x(t) = x_1 + v_1 t$ (время отсчитывается от t_1) – прямая линия.

При $t \in [t_2; t_4]$ $x(t) = x_2 + v_1 t + a_3 t^2/2$ (время отсчитывается от t_2) – парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a_3 < 0$ (рис. 1.26).

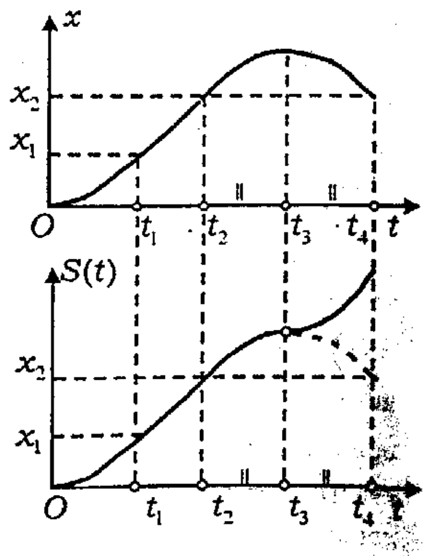


Рис. 1.26

По условию задачи $v(t)$

– непрерывная функция во всех точках, включая t_1 и t_2. Так как $v = x'(t)$, то функция $x(t)$ должна иметь производную в точках t_1 и t_2, поэтому прямая $x(t) = x_1 + v_1 t$ является касательной к параболам в точках t_1 и t_2. Так как $v = x'$ и $v(t_3) = 0$, то в точке t_3 функция $x(t)$ имеет экстремум (максимум). Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 1.26.

Для построения графика пройденного пути от времени надо учесть, что движение является прямолинейным, и пока тело удаляется от начала координат, $x(t)$ и $S(t)$ совпадают. При $t \in [t_3; t_4]$ координата уменьшается, но пройденный путь продолжает возрастать. (пройденный путь – неубывающая функция времени). Так как $a_1 = \text{tg}\alpha_1 < |\text{tg}\alpha_2| = |a_2|$, то парабола на участке $t \in [t_2; t_4]$ проходит более круто, чем на участке $[0; t_1]$. Зависимость $S(t)$ представлена на рис. 1. 26.

Задача 1.14. На рис. 1.27 представлен график зависимости координаты от времени для материальной точки, движущейся прямолинейно. Построить графики зависимостей проекции ускорения на ось x, а также пройденного пути от времени. Все указанные интервалы времени равны. CD, KL, NG – отрезки прямых с равными по модулю угловыми коэффициентами; BC, DE, FK, LMN, GT – участки парабол с равными по модулю старшими коэффициентами; AB и EF – отрезки прямых.

Решение.

При $t \in [0; t_1]$ $x(t) = \text{const}$ (точка находится в покое), поэтому $a = 0$, $v = 0$, $S = 0$. При $t \in [t_1; t_2]$ дана парабола $x(t) = x(t_1) + at^2/2$ (за начало отсчета времени принят момент $t = t_1$) $\Rightarrow$ движение равнопеременное (равноускоренное), причем $a = \text{const} > 0$, $v(t) = at$ (начальная скорость на этом участке равна 0) $\Rightarrow$ график $v(t)$ – прямая. На всех участках движения, где координата возрастает, пройденный путь

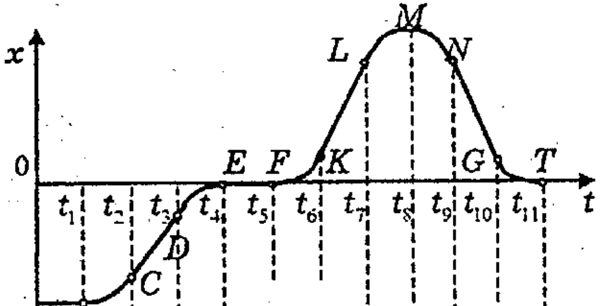


Рис. 1.27

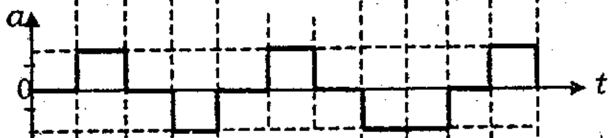


Рис. 1.28

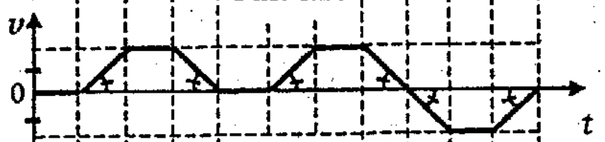


Рис. 1.29

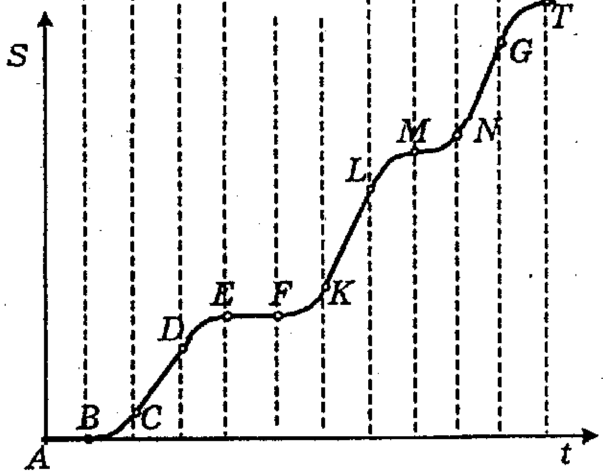


Рис. 1.30

$S(t) = |x(t) - x_0| = = x(t) - x_0 = x(t) + |x_0|$ (в нашей задаче $x_0 < 0$). График $S(t)$ получается из графика $x(t)$ параллельным переносом на $|x_0|$ по оси ординат. При $t \in [t_1; t_2]$ график

$S(t)$ – участок параболы BC (рис. 1.30), сдвинутый на $|x_0|$. При $t \in [t_3; t_4]$ $x(t) = x(t_3) + v(t_3) + at^2/2$, где $a = \text{const} < 0$, $v(t) = v(t_3) + at \Rightarrow$ график – прямая, образующая тупой угол с осью $0t$. Пройденный путь возрастает, поэтому график $S(t)$ – парабола. При $t \in [t_4; t_5]$ точка покоится, поэтому $a = 0, v = 0, S(t) = S(t_4) = \text{const}$. При $t \in [t_5; t_6]$ движение является равноускоренным, $a = \text{const}$, $v(t) = at \Rightarrow$ график – прямая, график $S(t)$ – парабола. При $t \in [t_6; t_7]$ движение является равномерным, $a = 0$, $v = \text{const} > 0$, график $S(t)$ – прямая. При $t \in [t_7; t_8]$ – равнопеременное движение, причем $a = \text{const} < 0$, $v(t) = v(t_7) + at$ – прямая. Так как при $t = t_8$ координата $x(t)$ достигает максимума, то скорость $v(t) = x'(t)$ обращается в этой точке в 0. При $t \in [t_7; t_8]$ график $S(t)$ – парабола, полученная из параболы LM параллельным переносом на $|x_0|$. При $t \in [t_8; t_9]$ координата $x(t)$ убывает, но пройденный путь $S(t)$ продолжает возрастать, график $S(t)$ – парабола. При $t \in [t_9; t_{10}]$ движение равномерное $\Rightarrow v = \text{const} < 0, a = 0$, при $t \in [t_{10}; t_{11}]$ движение равнопеременное, $\Rightarrow a = \text{const} < 0$, $v(t)$ – прямая $S(t)$ – парабола. Так как параболы на рис. 1.27 имеют одинаковые по модулю старшие коэффициенты, то модули ускорений в равнопеременных движениях одинаковы, равны также и углы наклона прямых на рис. 1.29. Из равенства модулей угловых коэффициентов прямых на рис. 1.27 следует равенство модулей скоростей в равномерных движениях.

Глава 2 . Динамика

Раздел механики, в котором изучаются причины возникновения ускорения у тел и способы его вычисления, называют динамикой. Основу динамики составляют три закона Ньютона.

2.1. Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона утверждает: существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются).

Системы отсчета, о которых идет речь в первом законе Ньютона, называются **инерциальными**. Для многих явлений можно считать инерциальной любую систему отсчета, связанную с Землей или с телами, которые по отношению к земной поверхности покоятся или движутся прямолинейно равномерно.

Системы отсчета, связанные с ускоренно движущимися телами, называют **неинерциальными**. Законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета не выполняются. В школьном курсе физики рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

2.2. Второй закон Ньютона

Основным положением динамики является то, что изменение движения тел (т.е. возникновение у тел ускорения) обусловлено их взаимодействием с другими телами. Все разнообразие взаимодействий в природе современная физика сводит лишь к четырем основным видам: гравитационным, электромагнитным, ядерным и слабым взаимодействиям.

Количественная мера взаимодействия тел есть сила. Сила – векторная величина. Она характеризуется точкой приложения, направлением и числовым значением (модулем). Когда на тело действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, которая называется равнодействующей. Если $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ – силы, приложенные к телу, то их равнодействующая

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n} \qquad (2.1)$$

Свойство физических тел изменять под действием сил свое движение за некоторый промежуток времени называется инертностью тел. Масса тела есть количественная мера инертности тела. Масса – скалярная величина.

Второй закон Ньютона утверждает, что ускорение, приобретаемое телом, пропорционально приложенной силе и обратно-пропорционально массе тела:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (2.2)$$

Если на тело действует несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, то в формуле (2.2) $\vec{F}$ – равнодействующая этих сил.

Второй закон Ньютона показывает, что ускорение тела определяется действующими на него силами, причем вектор ускорения $\vec{a}$ направлен так же, как и вектор равнодействующей сил $\vec{F}$. С точки зрения математики уравнение (2.2) равносильно уравнению:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad (2.3)$$

Последнее равенство равносильно системе трех скалярных равенств

$$F_x = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z, \qquad (2.4)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора $\vec{F}$ и a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

2.3. Основное уравнение динамики

Можно дать иную формулировку второго закона Ньютона, введя понятия импульса тела и импульса силы.

Импульсом тела называют векторную величину, равную произведению массы тела на его скорость:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что вектор импульса направлен так же, как и вектор скорости.

Импульсом постоянной силы называют произведение силы на время ее действия: $\vec{F} \cdot t$.

Вектор импульса силы сонаправлен с вектором силы.

Изменение импульса тела и импульс силы связаны между собой. Действующая на тело постоянная сила $\vec{F}$ сообщает ему постоянное ускорение $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$. В результате за время t скорость тела изменится от начальной $\vec{v}_0$ до скорости $\vec{v}$, причем из свойств равнопеременного движения

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0} \qquad (2.6)$$

Векторная величина $\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$ есть изменение импульса тела. Равенство (2.6) называют **основным уравнением динамики: изменение импульса тела равно импульсу действующей на тело силы.**

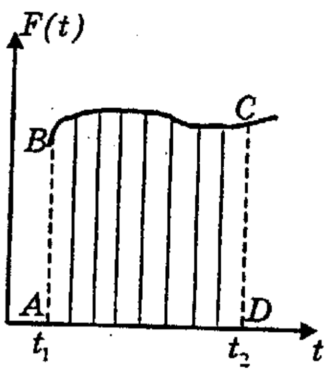


Рис. 2.1

Импульс силы $\vec{F}(t)$, **изменяющейся во времени, численно** равен площади криволинейной трапеции $ABCD$ на рис.2.1. Из свойств интегрального исчисления следует, что

$$S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt. \qquad (2.7)$$

Важным следствием основного уравнения динамики является то, **что одна и та же сила за равные промежутки времени изменяет импульс тел на одну и ту же величину независимо от их масс.**

2.4. Третий закон Ньютона

Любое действие тел друг на друга носит взаимный характер, т.е. если тело 1 действует на тело 2, то обязательно и тело 2 действует на тело 1. **Третий закон Ньютона** утверждает: **все тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению.**

На рис. 2.2 изображены взаимодействующие между собой тела 1 и 2. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, а модули этих сил равны, т.е. $F_1 = F_2$.

Третий закон Ньютона выполняется всегда, независимо от того, движутся ли взаимодействующие тела или находятся в относительном покое, независимо от того, посредством каких сил взаимодействуют тела. В инерциальных системах отсчета все силы возникают и исчезают только парами.

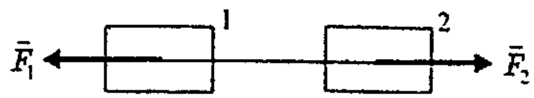


Рис. 2.2

Три закона Ньютона справедливы в инерциальных системах отсчета.

При рассмотрении механического движения тел приходится иметь дело с тремя видами сил: силой тяготения, силой упругости, силой трения.

2.5. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения утверждает: тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними. Гравитационные силы притяжения между телами вычисляются по формуле:

$$\boxed{F_1 = F_2 = F_г = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad (2.8)$$

где r – расстояние между телами, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – постоянная всемирного тяготения (гравитационная постоянная). Силы притяжения направлены вдоль прямой, соединяющей тела. Формула (2.8) используется, когда размеры тел m_1 и m_2 много меньше расстояния между ними (т.е. для описания взаимодействия между материальными точками). Формулу (2.8) можно использовать для вычисления сил притяжения между однородными шарами, расположенными на любых расстояниях. В этом случае в центры шаров помещают материальные точки, массы которых равны массам шаров, причем r в формуле (2.8) – это расстояние между их центрами. Аналогично используется формула (2.8) для вычисления сил притяжения между шаром и материальной точкой, расположенной вне шара.

Если материальная точка m расположена внутри шара радиусом R на расстоянии r от его центра O, то сила притяжения равна силе, действующей на точку со стороны шара радиусом r. (рис. 2.3)

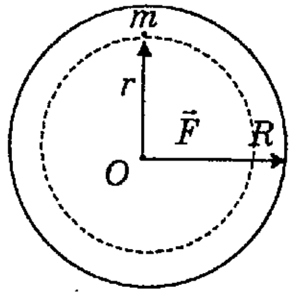


Рис. 2.3

Пусть ρ – плотность шара, его объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Сила притяжения $F_г = G\frac{mM_r}{r^2}$, где M_r - масса шара радиусом r.

$$M_r = \rho \cdot V_r = \rho\frac{4}{3}\pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$F_г = \frac{4}{3}G\rho\pi m r.$$

Когда точка находится в центре шара, сила притяжения обращается в 0.

2.6. Сила тяжести

Рассмотрим тело массой m, расположенное у поверхности Земли. Со стороны Земли на тело действует сила притяжения $F_г = G\frac{mM_З}{R_З^2}$, где $M_З$ и $R_З$ – масса и радиус Земли. По второму закону Ньютона $F_г = ma \Rightarrow G\frac{mM_З}{R_З^2} = ma \Rightarrow$

$a = G\frac{M_З}{R_З^2}$. Таким образом, ускорение, сообщаемое телу Землей, не зависит от массы тела. Его называют **ускорением свободного падения**, обозначают g. Итак,

$$\boxed{g = G\frac{M_З}{R_З^2} = 9{,}81\,\text{м/с}^2} \qquad (2.9)$$

где масса Земли $M_З = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг, а ее радиус $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения в каждой точке у поверхности Земли направлено вертикально вниз.

Силу притяжения тела к Земле называют **силой тяжести**. Ее модуль можно найти по формуле:

$$\boxed{G\frac{mM_З}{R_З^2} = mg} \qquad (2.10)$$

2.7. Вес тела

Вес тела – это сила, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес. Из определения следует, что вес тела приложен к опоре или подвесу, а не к телу. С точки зрения физики вес и сила тяжести не одно и то же: они всегда приложены к разным телам. Они могут быть равны по модулю, а могут и отличаться. Это связано с тем, что сила тяжести не зависит от того, движется тело или покоится, а вес тела зависит от ускорения, с которым движется опора или подвес.

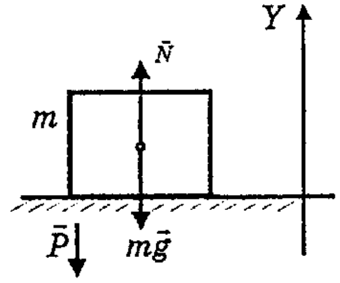


Рис. 2.4

Рассмотрим примеры.

1. На рис. 2.4 изображено тело массой m, покоящееся на горизонтальной поверхности. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно опоре. По третьему закону Ньютона тело давит на опору с силой $\vec{P} = -\vec{N}$. Модули этих сил равны: $P = N$. Сила $\vec{P}$, приложенная к опоре, – вес тела. (Последние два соотношения выполняются всегда, поэтому часто вместо веса тела находят равную ему по модулю нормальную составляющую силы реакции опоры). Так как тело m покоится, то, проецируя приложенные к нему силы на вертикальную ось Y, получим $N - mg = 0$ ($\vec{a} = 0$, $\vec{P}$ – приложена не к телу, а к опоре). Отсюда $N = mg = P$ (вес равен силе тяжести).

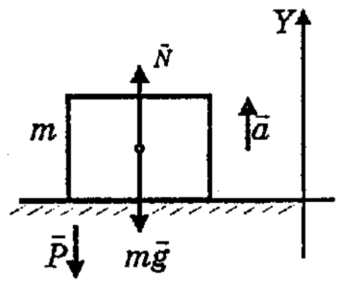


Рис. 2.5

2. На рис. 2.5 тело массой m находится на горизонтальной опоре, имеющей ускорение $\vec{a}$, направленное вертикально вверх.

На тело по-прежнему действуют силы: $\vec{N}$ и $m\vec{g}$, а к опоре приложен вес $\vec{P}$. По второму закону Ньютона для проекции на вертикальную ось Y получим $N - mg = ma \Rightarrow N = mg + ma = m(g + a)$. По третьему закону Ньютона $P = N = m(g + a)$ (вес больше силы тяжести).

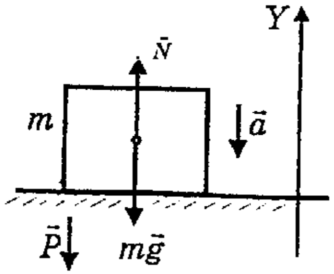


Рис. 2.6

3. На рис. 2.6 тело массой m находится на горизонтальной опоре, имеющей ускорение $a \le g$, направленное вертикально вниз. По второму закону Ньютона $N - mg = m(-a)$ (проекция вектора $\vec{a}$ на ось Y равна $-a$), поэтому $N = mg - ma = m(g - a) = P$ (вес меньше силы тяжести). При $a = g$ вес P обращается в 0, т.е. тело перестает давить на опору. В этом случае говорят о **состоянии невесомости**.

2.8. Сила упругости. Закон Гука

В ряде случаев форма или размеры тела могут изменяться. В этом случае говорят о **деформации тела**. **Сила упругости** возникает при деформации тела и направлена в сторону, противоположную смещению частиц при деформации. Деформация тела характеризуется его **относительным удлинением** $\varepsilon = \dfrac{|\Delta l|}{l_0}$, где l_0 – первоначальная длина тела, а $\Delta l = (l - l_0)$ – удлинение тела (Δl может принимать как положительные, так и отрицательные значения).

Деформация тела обусловлена действием на это тело некоторой силы. При этом в теле возникает **напряжение** $\sigma = \dfrac{F}{S}$, где F – модуль силы, вызывающей деформацию, S – площадь сечения тела, перпендикулярного направлению силы. При малых (упругих) по сравнению с размерами тела деформациях справедливо соотношение:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \qquad (2.11)$$

где E – модуль Юнга.

Проекция силы упругости вычисляется по закону Гука:

$$\boxed{(F_{упр})_x = -kx} \qquad (2.12)$$

где x – удлинение тела, k – коэффициент упругости. (В случае пружины k называют коэффициентом жесткости). Модуль силы упругости вычисляется по формуле

$$\boxed{F_{упр} = k|x|} \qquad (2.13)$$

2.9. Сила трения

Трением называют взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению. Сила трения направлена вдоль поверхности соприкосновения. **Сила трения представляет собой касательную составляющую силы реакции опоры.** На рис. 2.7 $\vec{R}$ – сила реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения (касательная составляющая $\vec{R}$) и $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции.

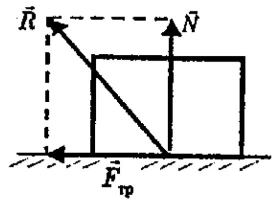


Рис. 2.7

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_{тр} + \vec{N}} \qquad (2.14)$$

О силе трения покоя говорят, когда тело пытаются сдвинуть, прикладывая к нему силу, однако движение еще не началось. Началу движения препятствует сила трения покоя, всегда направленная противоположно возможному перемещению тела. Ее модуль удовлетворяет неравенству

$$\boxed{0 \le F_{тр.п.} \le F_{тр.max}} \qquad (2.15)$$

причем $F_{тр.max} = \mu P$. Здесь μ – коэффициент трения, а P – модуль силы нормального давления на опору (поверхность).

Если тело скользит по поверхности, то на него действует **сила трения скольжения**. Она направлена в сторону, противоположную скорости тела. Модуль силы трения скольжения вычисляется по формуле

$$\boxed{F_{тр.} = \mu P} \qquad (2.16)$$

Таким образом, максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. Отметим, что по третьему закону Ньютона $P = N$, где N – нормальная составляющая силы реакции опоры.

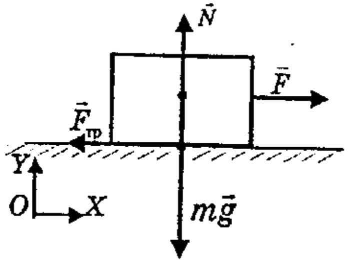


Рис. 2.8

На рис. 2.8 изображено тело массой m, находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности. К телу прикладывают силу $\vec{F}$ в горизонтальном направлении. Если приложенная сила $\vec{F}$ невелика, то тело покоится, так как началу движения препятствует сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п.}$. Записав второй закон Ньютона по оси X, получим

$$F - F_{тр} = 0 \Rightarrow F_{тр.п} = F.$$

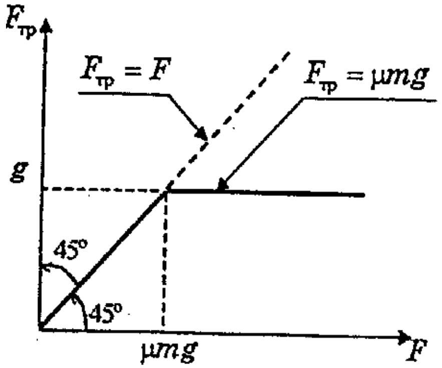


Рис. 2.9

При увеличении силы $\vec{F}$ будет возрастать и сила трения покоя, достигнув в некоторый момент своего максимального значения, равного силе трения скольжения. После этого тело начинает скользить, на него действует сила трения скольжения $F_{тр} = \mu P = \mu N = \mu mg$. При этом приложенная сила $\vec{F}$ продолжает возрастать, в то время как сила трения скольжения остается постоянной. График зависимости силы трения от приложенной силы приведен на рис. 2.9.

2.10. Примеры решения задач

Задача 2.1. Через неподвижный блок переброшена нерастяжимая нить. На концах этой нити подвешены грузы равных масс M. На один из грузов поставили груз массой m. Определить ускорения движения грузов, силу натяжения нити, силу давления груза m на M, а так же силу давления на ось блока. **Массой блока и нити можно пренебречь.**

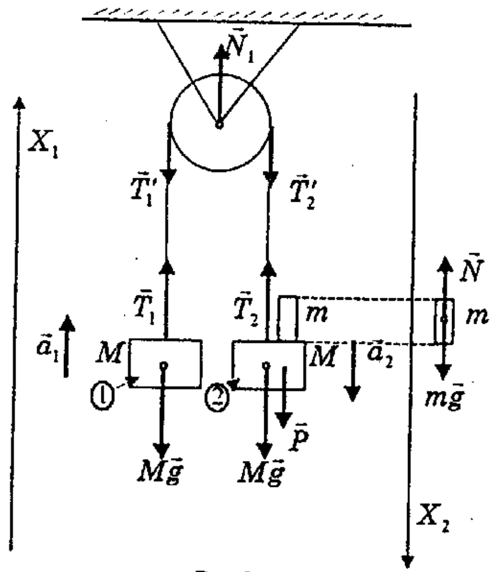


Рис 2.10

При решении этой задачи подробно разбираются основные этапы решения задач по динамике.

Решение.

1. Сделаем рисунок к данной задаче (рис. 2.10).

2. Укажем силы, приложенные к каждому телу системы. К телу 1 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения (упругости) нити $\vec{T}_1$. К телу 2 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_2$ и сила давления $\vec{P}$ со стороны тела m. Поскольку система движется с ускорением, то $P \neq mg$. **Так как массой блока и нити можно пренебречь, то сила натяжения одинакова по модулю во всех точках нити,** т.е. $T_1 = T_2 = T$. К телу m (оно нарисовано отдельно) приложены: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны тела 2. По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, а модули этих сил равны, т.е. $P = N$.

3. Определяем направление движения каждого тела системы и выбираем соответствующие оси координат. В данной задаче очевидно, что тело 2 и тело m двигаются вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_2$, а тело 1 поднимается вверх с ускорением $\vec{a}_1$. **Так как нить нерастяжима,** то модули этих ускорений равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$. В некоторых задачах сразу трудно указать как направлены ускорения тел. Тогда делают предположение о направлении ускорений тел системы. В ходе решения задачи это предположение либо подтверждается, либо опровергается. Коорди-

натные оси, как правило, выбирают по направлению ускорений. В данной задаче выбраны вертикальные оси X_1 и X_2.

4. Для каждого тела системы записываем второй закон Ньютона, спроецировав силы и ускорения на соответствующие оси.

$$\begin{array}{l} \text{Для тела 1} \\ \text{Для тела 2} \\ \text{Для тела } m \end{array}\begin{cases} T - Mg = Ma, \\ -T + Mg + P = Ma, \\ mg - N = ma, \end{cases} \quad \text{так как } P = N \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T - Mg = Ma & (1), \\ -T + Mg + P = Ma & (2), \\ mg - P = ma & (3). \end{cases}$$

5. Из полученной системы уравнений (или одного уравнения) выражаем неизвестные физические величины.

Сложив все уравнения системы, найдем, что

$$mg = a(2M + m) \Rightarrow \quad a = \frac{m}{2M + m} g.$$

Из уравнения (1) системы находим T:

$$T = Mg + Ma = Mg\frac{mg}{2M + m} = \frac{2M(M + m)g}{2M + m}.$$

Из уравнения (3) системы находим силу давления P:

$$P = mg - ma = mg - m\frac{mg}{2M + m} = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

Как отмечалось выше, $P \neq mg$, так как опора (тело 2) движется вниз с ускорением.

Для нахождения силы давления на ось блока рассмотрим силы, действующие на него. Взаимодействие блока с нитью дает две силы натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, причем $\vec{T}_1' = \vec{T}_2' = T_1 = T_2 = T$. Кроме того, на блок действует сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны оси. Запишем второй закон Ньютона для блока, проецируя силы на ось X_1, получим $N_1 - 2T = 0$ (так как у блока нет ускорения, его массой можно пренебречь.) Значит, $N_1 = 2T$. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой N_1' блок давит на ось. Итак, $N_1' = 2T = \dfrac{4M(M + m)g}{2M + m}$.

Задача 2.2. Определить модуль ускорения грузов, силу натяжения нити, силу давления груза M на наклонную плоскость. (Рис. 2.11). Масса грузов – M и m, угол при основании наклонной плоскости – α. Трения нет. Нить нерастяжима. Массой блока и нити можно пренебречь.

Решение.

К грузу m приложены: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения

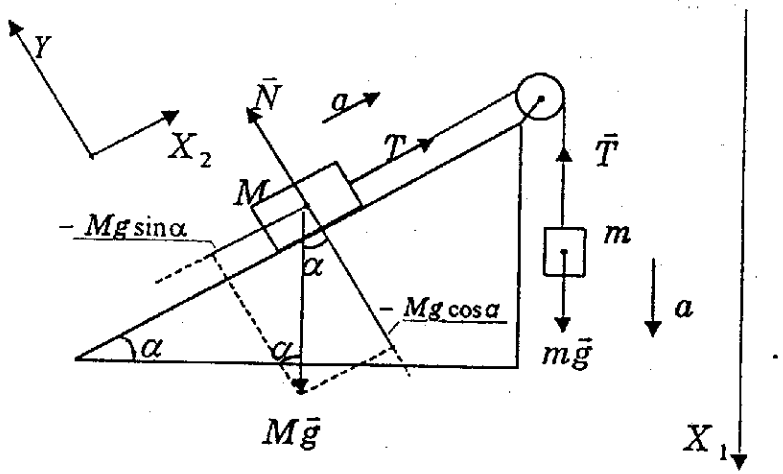


Рис. 2.11

нити $\vec{T}$. К грузу M приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити, модуль которой равен T.

Направление ускорений грузов зависит от массы грузов и угла α. Предположим, что ускорения грузов направлены, как показано на рис. 2.11. Тогда для груза m выбираем ось X_1, а для груза M – оси X_2 и Y, причем X_2 направлена параллельно наклонной плоскости, а Y – перпендикулярно ей.

Записываем второй закон Ньютона:

$$\begin{array}{l} \text{Для груза } m \text{ по оси } X_1 \\ \text{Для груза } M \text{ по оси } X_2 \end{array}\begin{cases} mg - T = ma, \\ T - Mg\sin\alpha = Ma. \end{cases}$$

После сложения уравнений получим:

$$g(m - M\sin\alpha) = a(m + M) \Rightarrow \quad a = \frac{m - M\sin\alpha}{m + M} g.$$ Из первого уравнения системы выражаем $T = mg - ma = \frac{mMg(1 + \sin\alpha)}{m + M}$.

Для определения силы реакции $\bar{N}$ запишем второй закон Ньютона для груза M по оси Y. Получаем: $N - Mg\cos\alpha = 0$ (проекция ускорения на ось Y равна 0). Отсюда $N = Mg\cos\alpha$. С такой же по модулю силой груз давит на наклонную плоскость.

Грузы будут иметь ускорения, направленные как показано на рис. 2.11, если $a > 0 \Rightarrow \frac{m - M\sin\alpha}{m + M} > 0 \Rightarrow m > M\sin\alpha$. Если $m < M\sin\alpha$, то ускорения грузов направлены в противоположную сторону.

При решении задач по динамике, **в которых оговорено отсутствие трения,** направление ускорений можно выбирать произвольно. Если при подстановке числовых значений получаются положительные значения ускорений, то их направления выбраны правильно. Если получаются отрицательные значения, то направления ускорений надо изменить на противоположные.

Задача 2.3. По горизонтальной поверхности скользит тело массой m под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ. Определить силу трения, действующую на тело (рис. 2.12)

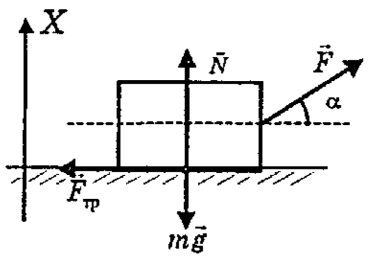


Рис. 2.12

Решение.

На тело кроме приложенной силы $\vec{F}$ действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Силу трения скольжения можно вычислить по формуле $F_{тр} = \mu N$. Следует особо подчеркнуть, что в данном случае $N \neq mg$. Действительно, для оси X второй закон Ньютона запишется в виде:

$$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha \neq mg.$$

Итак, $F_{тр} = \mu(mg - F\sin\alpha)$.

Задача 2.4. На горизонтальной плоскости расположены два тела, масса которых m_1 и m_2, связанные нитью (рис. 2.13). Нить расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центры тел, и образует с горизонтом угол α. К телу m_1 приложена горизонтальная сила F. Определить силу натяжения нити при условии, что тела скользят по горизонтальной поверхности, их коэффициент трения о поверхность равен μ, угол α в процессе движения не изменяется.

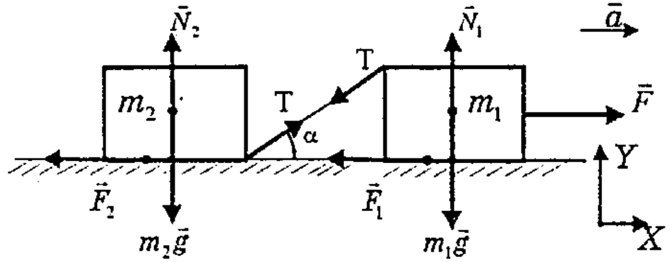


Рис. 2.13

Решение.

Указываем силы, приложенные к каждому телу. На тело m_1 действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$, сила натяжения нити, модуль которой равен T, сила трения скольжения $\vec{F}_1$. К телу m_2 приложены: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_2$, сила натяжения нити (ее модуль – T), сила трения скольжения $\vec{F}_2$. Ускорение тел равно a (в частном случае a=0). Вводим горизонтальную ось X и вертикальную ось Y, проецируем на них силы, и для каждого тела записываем второй закон Ньютона.

Получаем две системы:

$$\begin{cases} F - T\cos\alpha - F_1 = m_1 a, \\ T\cos\alpha - F_2 = m_2 a. \end{cases} \quad \begin{cases} N_1 - T\sin\alpha - m_1 g = 0, \\ N_2 + T\sin\alpha - m_2 g = 0. \end{cases}$$

Из второй системы находим

$$\begin{cases} N_1 = T\sin\alpha + m_1 g, \\ N_2 = m_2 g - T\sin\alpha. \end{cases}$$

Выражаем силы трения скольжения:

$$\begin{cases} F_1 = \mu N_1 = \mu(T\sin\alpha + m_1 g), \\ F_2 = \mu N_2 = \mu(m_2 g - T\sin\alpha). \end{cases}$$

После этого первая система приводится к виду:

$$\begin{cases} F - T\cos\alpha - \mu(T\sin\alpha + m_1 g) = m_1 a, \\ T\cos\alpha - \mu(m_2 g - T\sin\alpha) = m_2 a, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} F - T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu m_1 g = m_1 a, \\ T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu m_2 g = m_2 a, \end{cases} \Rightarrow$$

$$F - \mu m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}.$$

Тогда $T = \dfrac{\mu m_2 g + m_2 a}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \dfrac{m_2 F}{(m_1 + m_2)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$.

Задача 2.5. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, положили тело массой m. Определить, с каким ускорением будет двигаться тело. Чему равна сила трения, действующая на него? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ (рис. 2.14).

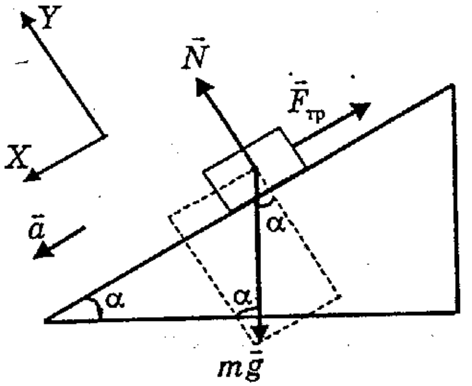


Рис. 2.14

Решение.

К телу приложены сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Очевидно, что при небольших углах α тело на наклонной плоскости покоится и его ускорение $a = 0$. В этом случае на него действует сила трения покоя. По второму закону Ньютона, записанному для оси X, получаем $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0 \Rightarrow F_{тр} = mg\sin\alpha$. При увеличении угла α тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$, причем на него действует сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$. Силу реакции N легко найти, записав второй закон Ньютона для оси Y: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{тр} = \mu mg\cos\alpha.$$

Для оси X в этом случае получим:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma \Rightarrow \qquad mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Тело будет покоиться на наклонной плоскости, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения μN, т.е. $mg\sin\alpha < \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\alpha < \mu}$. Если $\boxed{\mathrm{tg}\alpha > \mu}$, тело ускоренно скользит по наклонной плоскости. При $\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \mu}$ тело будет покоиться на наклонной плоскости, если ему не сообщена начальная скорость. Если тело обладает начальной скоростью, направленной вниз параллельно наклонной плоскости, то оно будет скользить равномерно.

Задача 2.6. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени приведен на рис. 2.15. Найти угол наклона плоскости к горизонту и максимальную высоту подъема шайбы.

Решение.

Из графика на рис. 2.15 следует, что начальная скорость шайбы υ_0=6м/с, время подъема шайбы t_1=3с, время спуска t_2=(7,5–3)=4,5с, конечная скорость шайбы $\upsilon_к$=4м/с. Рассмотрим движение шайбы вверх. Действующие на шайбу силы изображены на рис. 2.16.

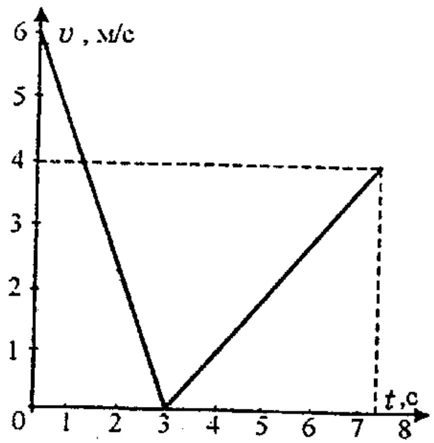


Рис. 2.15

Здесь $m\bar{g}$ – сила тяжести, $\bar{N}$ – сила реакции опоры, $\bar{F}_{тр}$ – сила трения скольжения. Эти силы определяют ускорение шайбы $\bar{a}_1$. Найдем его, используя второй закон Ньютона. Для этого введем стандартную в таких задачах координатную систему, направив ось X вверх вдоль наклонной плоскости, и спроецируем силы.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_1, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases}$$

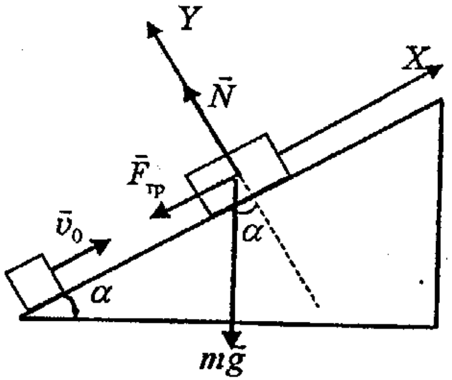


Рис. 2.16

Здесь μ – коэффициент трения скольжения, a_1 – проекция ускорения.

Из этой системы находим

$a_1 = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Знак минус указывает на то, что ускорение $\bar{a}_1$ направлено противоположно выбранной оси. Так как ускорение шайбы постоянно, то проекция скорости выражается формулой $\upsilon_x(t) = \upsilon_0 + a_1 t = \upsilon_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t$. В момент времени $t = t_1 = 3$ с $\upsilon_x = 0$, получаем уравнение $\upsilon_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1 = 0$ (*).

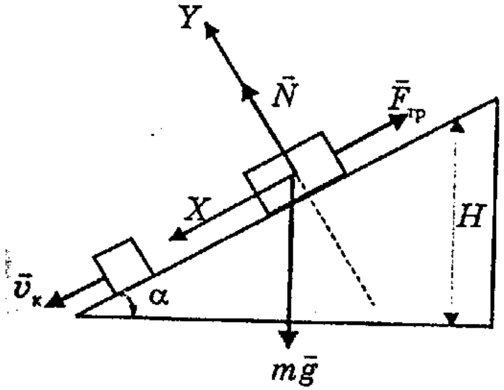


Рис. 2.17

Рассмотрим движение шайбы вниз. На этом участке начало отсчета времени соответствует моменту, когда шайба начинает движение вниз. Силы, приложенные к шайбе, не изменились, лишь сила трения скольжения изменила направление. Координатные оси удобно направить, как показано на рис. 2.17.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_2, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} = \mu N, \end{cases} \Rightarrow \quad a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

где a_2 – проекция ускорения при движении вниз. Проекция скорости выражается формулой $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_2 t = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$. В момент времени $t = t_1 = 4{,}5$ с $\upsilon_x = \upsilon_к$. Получаем уравнение $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t_2 = \upsilon_к$ (**). Уравнения (*) и (**) образуют систему с двумя неизвестными α и μ:

$$\begin{cases} \upsilon_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1 = 0, \\ g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t_2 = \upsilon_к; \end{cases} \Rightarrow \pm\begin{cases} \sin\alpha + \mu\cos\alpha = \dfrac{\upsilon_0}{gt_1}, \\ \sin\alpha - \mu\cos\alpha = \dfrac{\upsilon_к}{gt_2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha = \left(\dfrac{\upsilon_0}{t_1} + \dfrac{\upsilon_к}{t_2}\right)\cdot\dfrac{1}{g}, \\ 2\mu\cos\alpha = \left(\dfrac{\upsilon_0}{t_1} - \dfrac{\upsilon_к}{t_2}\right)\cdot\dfrac{1}{g}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin\left(\left(\frac{v_0}{t_1} + \frac{v_к}{t_2}\right)\cdot\frac{1}{2g}\right), \\ \mu = \left(\frac{v_0}{t_1} - \frac{v_к}{t_2}\right)\cdot\frac{1}{2g\cos\alpha}, \end{cases} \Rightarrow \alpha = 8{,}5°; \mu = 0{,}06.$$

Рассмотрим движение шайбы вниз и воспользуемся формулой (1.21) для равнопеременного движения. Получаем $v_к^2 = 2a_2(x_к - x_0)$, где $x_к - x_0 = l$ – расстояние, пройденное шайбой вдоль наклонной плоскости, $l = \frac{v_к^2}{2a_2}$, а максимальная высота подъема:

$$H = l\sin\alpha = \frac{v_к^2\sin\alpha}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{v_к^2}{2g(1 - \mu\operatorname{ctg}\alpha)} = 1{,}7 \text{ м}.$$

Задача 2.7. Определить ускорение тел в системе, показанной на рис. 2.18. Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью μ =0,1. Массой блока и нити можно пренебречь. Нить нерастяжима. Масса грузов m_1=1,5кг, m_2=0,5кг. Сила $\vec{F}$ образует угол $\alpha = 30°$ к горизонту, а ее модуль равен $10H$.

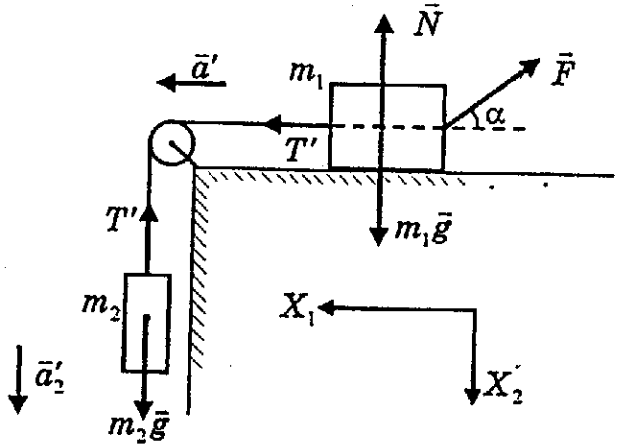


Рис 2.18

Решение.

При решении задач подобного типа мы не можем сразу определить, как направлена сила трения. Для решения этого вопроса поступают следующим образом. Предполагают, что трения вообще нет, и решают более простую задачу. Тогда силы, приложенные к грузам, изображены на рис. 2.18 (T'–модуль силы натяжения нити). Так как трения нет, то можно сделать произвольное предположение о направлении ускорений a_1' и a_2', например, как показано на рис. 2.18. Учитывая, что $a_1' = a_2' = a'$, по второму закону Ньютона для осей X_1 и X_2 получаем систему:

$$\begin{cases} T' - F\cos\alpha = m_1 a', \\ m_2 g - T' = m_2 a', \end{cases} \Rightarrow \quad m_2 g - F\cos\alpha = a'(m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$a' = \frac{m_2 g - F\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

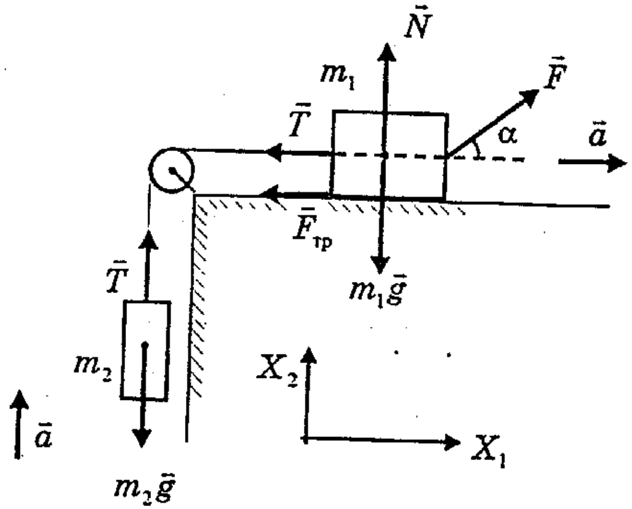


Рис 2.19

Подставив числовые значения, найдем $a' = -1{,}75$ м/с^2.

Таким образом, если трения нет, то грузы движутся в направлениях, противоположных осям X_1 и X_2.

Из-за трения движение в системе может только замедлиться или прекратиться, но не может измениться на противоположное. Значит, грузы имеют одинаковые по модулю ускорения a, направленные, как показано на рис. 2.19.

Теперь можно указать направление силы трения. По второму закону Ньютона получаем систему:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - T - F_{тр} = m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F\cos\alpha - m_2 g - F_{тр}}{m_1 + m_2},$$

где $F_{тр} = \mu N$.

По оси X_2 для груза m_1 получаем

$$N + F\sin\alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow N = m_1 g - F\sin\alpha.$$

Подставляя в уравнения для $F_{тр}$ и a, находим

$$a = \frac{F\cos\alpha - m_2 g - \mu(m_1 g - F\sin\alpha)}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2} = 1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2.8. Определить ускорение каждого из тел в системе, изображенной на рис. 2.20. Нити нерастяжимы. Массой блоков и нитей можно пренебречь. Трения нет. Масса грузов m_1=0,1кг, m_2=0,6кг. Угол $\alpha = 30°$.

Решение.

Силы, приложенные к телам m_1 и m_2, изображены на рис. 2.20. Модуль силы натяжения нити 1 равен T_1, а нити 2 – T_2. Предполагая, что ускорения тел $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ направлены, как показано на рис. 2.20, введем оси координат X_1 и X_2 и запишем второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g\sin\alpha = m_1 a_1 \quad (1), \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (2). \end{cases}$$

В этой системе содержится 4 неизвестных: T_1, T_2, a_1, a_2. Запишем второй закон Ньютона для подвижного блока:

$T_2 - 2T_1 = 0$ (так как массой блока можно пренебречь) $\Rightarrow T_2 = 2T_1$ (3). Учтем далее, что за любые равные промежутки времени модуль перемещения тела m_2 вдвое меньше модуля перемещения тела m_1. Так как модули перемещения пропорциональны модулям ускорений, то $a_1 = 2a_2$ (4). Уравнение (4) называют **уравнением кинематической связи**. В разобранных ранее задачах уравнение кинематической связи представляло собой простейшее равенство: $a_1 = a_2$.

Подставляя (4) в (1) и (3) в (2), получим систему с двумя не-

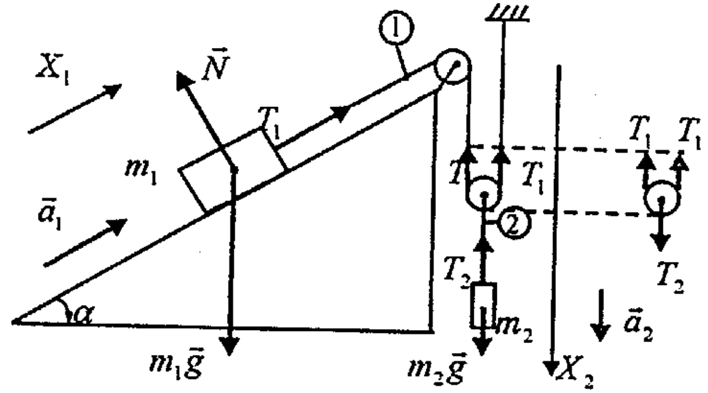


Рис. 2.20

известными:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g\sin\alpha = 2m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T_1 - 2m_1 g\sin\alpha = 4m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$g(m_2 - 2m_1\sin\alpha) = a_2(4m_1 + m_2) \Rightarrow a_2 = \frac{m_2 - 2m_1\sin\alpha}{4m_1 + m_2} g;$$

$a_2 = 4{,}9$ м/с^2, $a_1 = 9{,}8$ м/с^2.

Задача 2.9. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. В каком направлении и с каким ускорением должна бежать по доске собака массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости (рис. 2.21)?

Решение.

К доске приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции со стороны наклонной плоскости $\vec{N}$, сила давления собаки $\vec{P}$. Для того, чтобы доска не соскальзывала, сила трения $\vec{F}'_{тр}$, действующая на нее со стороны собаки, должна быть направлена вверх, параллельно наклонной плоскости. По третьему закону Ньютона сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая на собаку со стороны доски, направлена в противоположную сторону, причем $F_{тр} = F'_{тр}$. Значит, собака должна бежать вниз. Кроме силы трения на собаку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны доски $\vec{P}'$, причем $\vec{P} = -\vec{P}'$. Записав второй закон Ньютона по оси X для собаки и доски, получим:

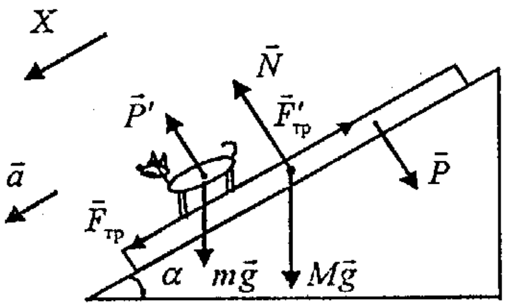


Рис. 2.21

$$\begin{matrix}\text{для доски} \\ \text{для собаки}\end{matrix}\begin{cases} Mg\sin\alpha - F_{тр} = 0, \\ F_{тр} + mg\sin\alpha = ma, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{тр} = Mg\sin\alpha, \\ Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = ma, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{M+m}{m} g\sin\alpha .$$

Задача 2.10. На наклонной плоскости с углом наклона α неподвижно лежит кубик, причем коэффициент трения между кубиком и плоскостью равен $\mu > \mathrm{tg}\alpha$. Наклонная плоскость движется с ускорением $\vec{a}$ в направлении, указанном стрелкой. При каком минимальном значении этого ускорения кубик начнет соскальзывать? (Рис. 2.22).

Решение.

Отметим, что при $a = 0$ условие $\mu > \mathrm{tg}\alpha$ означает, что кубик на наклонной плоскости покоится (см. задачу 2.5).

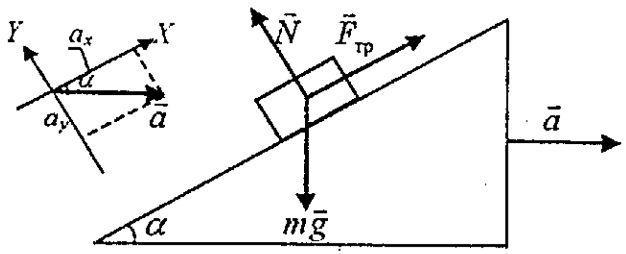


Рис. 2.22

Предположим, что кубик относительно плоскости не скользит. Его ускорение относительно Земли равно $\vec{a}$. К кубику приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, модуль которой $F_{тр} < \mu N$. Проекции ускорения $\vec{a}$ на оси X и Y равны $a_x = a\cos\alpha$ и $a_y = -a\sin\alpha$. По второму закону Ньютона получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} F_{тр} - mg\sin\alpha = ma_x, \\ N - mg\cos\alpha = ma_y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{тр} - mg\sin\alpha = ma\cos\alpha, \\ N - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha, \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_{тр} = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha \text{ и } N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha .$$

Так как $F_{тр} < \mu N$, то

$$mg\sin\alpha + ma\cos\alpha < \mu(mg\cos\alpha - ma\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) < g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < g\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha$, получим $a < g\dfrac{\mu - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\mathrm{tg}\alpha}$. Следовательно, кубик будет соскальзывать с плоскости при $a \geq g\dfrac{\mu - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\mathrm{tg}\alpha}$. Минимальное значение ускорения, при котором начинается соскальзывание $a = g\dfrac{\mu - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\mathrm{tg}\alpha}$.

Если $\mu \le \mathrm{tg}\alpha$, как было показано в задаче 2.5, кубик будет соскальзывать с плоскости даже при $a = 0$.

Задача 2.11. На подставке лежит тело, подвешенное к потолку с помощью пружины. В начальный момент времени пружина недеформирована. Подставку начинают опускать вниз с ускорением $\vec{a}$. Через какое время тело оторвется от подставки? Коэффициент жесткости пружины равен k, масса тела – m (рис. 2.23).

Решение.

В начальный момент времени пружина недеформирована, поэтому сила упругости равна нулю. На тело действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Введем координатную ось X, начало которой совместим с положением тела в начальный момент времени. Когда подставка начнет двигаться вниз, пружина удлинится и возникнет сила упругости, модуль которой $F_y = kx$, где x – деформация пружины, равная координате тела. По второму закону Ньютона

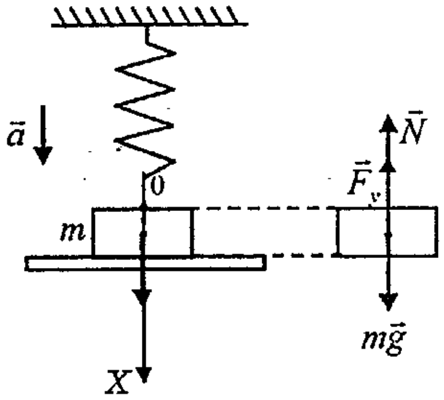


Рис. 2.23

$mg - N - F_y = ma$. В момент отрыва тела от подставки $N = 0 \Rightarrow mg - kx_1 = ma_1$, где x_1 – координата тела в момент отрыва. Значит, $x_1 = \dfrac{mg - ma}{k}$. С другой стороны, координату подставки $x(t)$ можно выразить из законов равнопеременного движения $x(t) = x_0 + v_0 + \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{at^2}{2}$. Получаем уравнение $\dfrac{mg - ma}{k} = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2m}{k}\left(\dfrac{g}{a} - 1\right)}$.

Задача 2.12. К концу висящей вертикально пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой m. Затем длину уже растянутой пружины делят на три равные части и в полученных таким образом точках подвешивают еще два груза массой $3m$ и $2m$, считая от точки крепления пружины. Определить длину пружины в этом случае. Коэффициент жесткости пружины равен k, а ее длина в недеформированном состоянии равна l_0 (рис. 2.24).

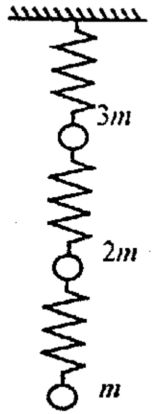


Рис. 2.24

Решение.

Решение задачи проводим в предположении, что выполняется закон Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ – относительное удлинение, E – модуль Юнга, $\sigma = \dfrac{F}{S}$ – напряжение, вызванное силой F, действующей перпендикулярно сечению S. После подстановки получаем $\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow$ $F = \dfrac{ES}{l_0}\Delta l$ или $F = k\Delta l$, где $k = \dfrac{ES}{l_0}$ – коэффициент упругости, при малых деформациях не зависящий от Δl. Когда речь идет о пружине, k называют коэффициентом жесткости. Если Δl мало, то сечение пружины можно считать постоянным и, таким образом, **коэффициент жесткости обратно пропорционален длине пружины.**

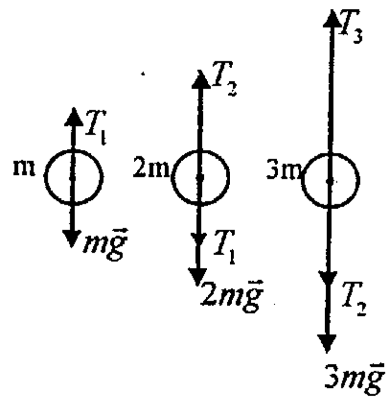


Рис. 2.25

Рассмотрим три груза, подвешенных на пружине (рис. 2.24). Отметим, что образовалось три пружины, каждая из которых деформирована. В соответствии с нашим допущением деформации эти малы, поэтому длину недеформированных пружин можно принять за $\frac{1}{3}l_0$. Следовательно, коэффициент жесткости каждой из пружин равен $3k$. Укажем силы, приложенные к каждому грузу (рис.2.25).

Здесь T_1, T_2, T_3 – модули сил упругости каждой из пружин, $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ – их деформации. Записывая условия равновесия грузов на вертикальную ось, получим систему:

$$\begin{cases} T_1 - mg = 0, \\ T_2 - T_1 - 2mg = 0, \\ T_3 - T_2 - 3mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = mg, \\ T_2 = 3mg, \\ T_3 = 6mg, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k\Delta x_1 = mg, \\ 3k\Delta x_2 = 3mg, \\ 3k\Delta x_3 = 6mg, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = \dfrac{mg}{3k}, \\ \Delta x_2 = \dfrac{mg}{k}, \\ \Delta x_3 = \dfrac{2mg}{k}. \end{cases}$$

Полная деформация пружины

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 4mg/3k$.

Длина пружины $l = l_0 + \Delta x = l_0 + 4mg/3k$.

Задача 2.13. В механической системе, изображенной на рис. 2.26, масса тел $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Трение между соприкасающимися поверхностями отсутствует. Высота клина m_2 равна H, угол при основании α. В начальный момент времени тело m_3 покоится на вершине клина. Определить ускорение клина и время соскальзывания тела m_3.

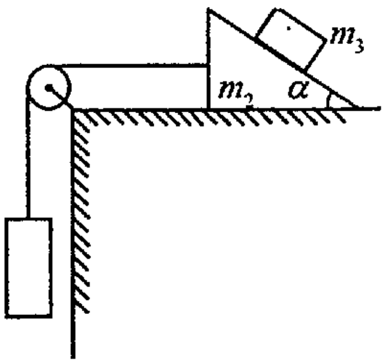


Рис 2.26

Решение.

Предположим, что тело m_3 не отрывается от поверхности клина. На тело m_1 действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, которые сообщают ему ускорение $\vec{a}$ (рис. 2.27).

К клину m_2 приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со

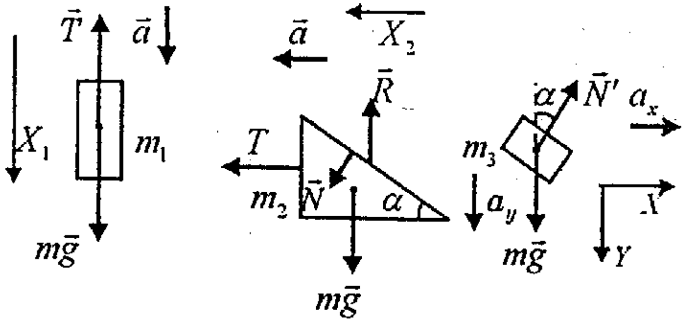


Рис 2.27

стороны горизонтальной опоры $\vec{R}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны груза m_3, ускорение клина направлено горизонтально, и его модуль равен a. На тело m_3 действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны клина $\vec{N}'$, причем $N' = N$. Эти силы сообщают телу m_3 некоторое ускорение, которое можно спроецировать на горизонтальное и вертикальное направления, обозначив эти проекции как a_x и a_y соответственно (рис. 2.27). Спроецировав силы, приложенные к телу m_1, на вертикальную ось X_1, по второму закону Ньютона получим $mg - T = ma$. Для клина проецируем силы на горизонтальную ось X_2 и получаем $T + N\sin\alpha = ma$. Для тела m_3 силы проецируем на Y и X, получаем уравнения $mg - N\cos\alpha = ma_y$ и $N\sin\alpha = ma_x$. В последних двух уравнениях учтено, что $N' = N$. В полученных четырех уравнениях содержится пять неизвестных, поэтому необходимо добавить уравнение кинематической связи. На рис. 2.28 представлены положения тел m_2 и m_3 в два различных момента времени.

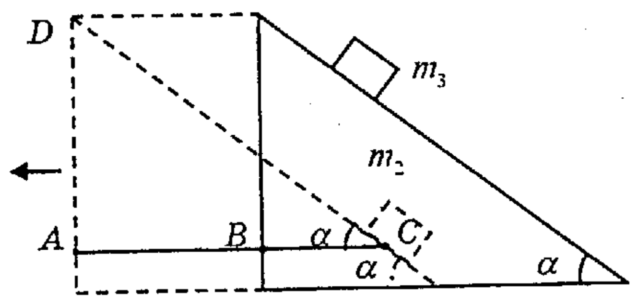


Рис. 2.28

AD – смещение тела m_3 по вертикали, пропорциональное a_y; BC – смещение тела m_3 по горизонтали, пропорциональное a_x; AB – смещение клина m_2, пропорциональное a. Так как $AC = AB + BC$ и $AC = \dfrac{AD}{\text{tg}\alpha}$, то $AD = (AB + BC)\,\text{tg}\alpha$, следовательно $a_y = (a + a_x)\,\text{tg}\alpha$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mg - T = ma, \\ T + N\sin\alpha = ma, \\ mg - N\cos\alpha = ma_y, \\ N\sin\alpha = ma_x, \\ a_y = (a + a_x)\text{tg}\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mg - T = ma, \\ mg + N\sin\alpha = 2ma, \\ mg - N\cos\alpha = m(a + a_x)\text{tg}\alpha, \\ N\sin\alpha = ma_x, \\ a_y = (a + a_x)\text{tg}\alpha. \end{cases}$$

Выражая N из четвертого уравнения и подставляя во второе и третье, получаем:

$$\begin{cases} mg + ma_x = 2ma, \\ mg - \dfrac{ma_x\cos\alpha}{\sin\alpha} = m(a + a_x)\text{tg}\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g + a_x = 2a, \\ g - a_x\text{ctg}\alpha = (a + a_x)\text{tg}\alpha, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 2a - g, \\ g - a\text{tg}\alpha = a_x(\text{ctg}\alpha + \text{tg}\alpha), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 2a - g, \\ g - a\text{tg}\alpha = (2a - g)\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 2a - g, \\ g\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) = a\left(\text{tg}\alpha + \dfrac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{g\sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin^2\alpha + 2}, \\ a = \dfrac{g(1 + \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin^2\alpha + 2}. \end{cases}$$

Из пятого уравнения исходной системы находим:

$$a_y = (a + a_x)\text{tg}\alpha = \frac{g\sin\alpha(3\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha + 2}.$$

Закон движения тела m_3 в вертикальном направлении $y(t) = \dfrac{a_y t^2}{2}$. В момент соскальзывания с клина

$$y = H = \frac{a_y t^2}{2}.$$

Искомое время $t = \sqrt{\dfrac{2H}{a_y}} = \sqrt{\dfrac{2H}{g} \cdot \dfrac{\sin^2\alpha + 2}{\sin\alpha(3\sin\alpha + \cos\alpha)}}$.

Анализируя выражение для a_x, делаем вывод, что $a_x = 0$, если $2\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \text{arctg}2$. При этом $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha = 5 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ и

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. При этом $a_y = g\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\dfrac{4}{5} + 2} = g$. Итак, приведенное выше решение, соответствующее случаю скольжения тела m_3 по поверхности клина, верно при $\alpha < \mathrm{arctg}2$. При $\alpha \geq \mathrm{arctg}2$ тело m_3 отрывается от клина и свободно падает с ускорением g. В этом случае ускорение клина – это ускорение системы, состоящей из тел m_1 и m_2, и оно равно $a = \dfrac{g}{2}$ (см. решение задачи 2.2). Время свободного падения тела m_3 с высоты H равно $\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. Понятно, что второй случай в этой задаче обусловлен присутствием в системе тела m_1.

Задача 2.14. Две частицы, масса которых m и $2m$, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями, модуль которых равен v. На частицы в течение некоторого времени действуют одинаковые силы. При этом частица m начинает двигаться в обратном направлении со скоростью, модуль которой v (рис. 2.29). Как будет двигаться частица массой $2m$?

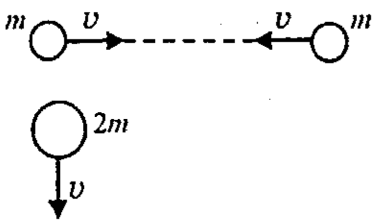


Рис. 2.29

Решение.

Начальный импульс частицы m равен $\vec{p}_0$ (рис. 2.30), причем $p_0 = mv_0$. Конечный ее импульс $\vec{p}$, причем $p = mv$. Изменение импульса частицы массой m: $\Delta\vec{p} = \vec{p} - p_0 = \vec{p} + (-p_0)$.

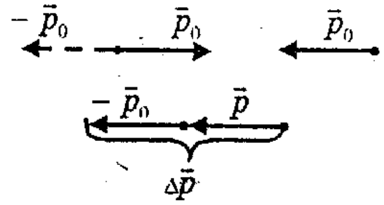


Рис. 2.30

Вектор $\Delta\vec{p}$ построен на рис. 2.30. Его модуль $\Delta p = 2mv$. По условию задачи импульсы сил, действовавших на частицы, равны, поэтому импульс частицы $2m$ изменится также на $\Delta\vec{p}$. Начальный импульс ее $\vec{p}\,'_0$ $(p'_0 = 2mv)$. Конечный импульс – $\vec{p}\,'$ $(p' = 2mu)$, где u – конечная скорость. Так как $\vec{p}\,' - \vec{p}\,'_0 = \Delta\vec{p}$, то $\vec{p}\,' = \vec{p}\,'_0 + \Delta\vec{p}$. Вектор $\vec{p}\,'$ построен на рис. 2.31.

В ΔAOB $(\angle AOB = 90°)$ $AO = BO = 2mv$, поэтому $\angle OAB = \angle OBA = 45°$ и $AB = p' = AO\sqrt{2} = 2mv\sqrt{2}$.

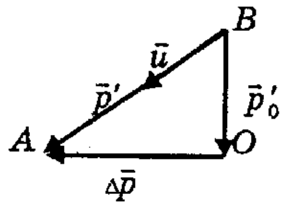


Рис. 2.31

Скорость частицы $2m$ направлена под углом $45°$ к направлению первоначального движения. Модуль скорости находим из условия $2mv\sqrt{2} = 2mu \Rightarrow u = v\sqrt{2}$.

Задача 2.15. Тело массой m брошено под углом к горизонту. За время полета до наивысшей точки подъема импульс тела изменился на Δp. Определить полное время полета.

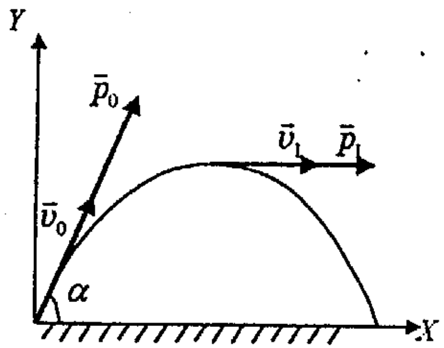


Рис. 2.32

Решение.

Пусть v_0 – начальная скорость тела, α – угол между вектором начальной скорости и горизонтом (рис.2.32).

Начальный импульс тела $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ $(p_0 = mv_0)$. В главе 1 показано, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается по параболе, совершая при этом два независимых движения: в горизонтальном и в вертикальном направлениях. Движение в горизонтальном направлении X происходит с постоянной скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha$. Движение в вертикальном направлении Y – равнопеременное движение с ускорением $\vec{g}$.

Скорость $\vec{\upsilon}_1$ в точке наивысшего подъема направлена по касательной к параболе, т.е. горизонтально. Значит, в этой точке вертикальная проекция скорости $\upsilon_y = 0$ и $\upsilon_1 = \upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha$. Импульс тела в точке наивысшего подъема $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$ $(p_1 = m\upsilon_1 = m\upsilon_0\cos\alpha)$ направлен горизонтально. Изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + (-\vec{p}_0)$. Построим вектор $\Delta\vec{p}$, используя правило параллелограмма для сложения векторов (рис.2.33).Так как υ_0 – гипотенуза, а υ_x – катет прямоугольного треугольника, то p_0 и p_1 соответсвенно гипотенуза и катет прямоугольного треугольника ABC. Так как в параллелограмме $ADNC$ $AD \parallel NC$ и, $AD = NC$, то $AB \parallel NC$ и $AB = NC \Rightarrow ABCN$ – параллелограмм. Поэтому $AN \parallel BC \Rightarrow AN \perp AC$, т.е. вектор $\Delta\vec{p}$ направлен вертикально вниз. Его модуль из ΔABC: $\Delta p = p_0\sin\alpha = m\upsilon_0\sin\alpha$.

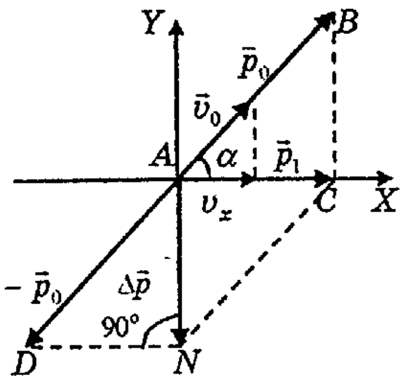


Рис. 2.33

Изменение импульса Δp можно определить иначе, используя векторную алгебру. Вектор $\vec{p}_0$ имеет координаты (проекции) $p_{0x} = p_0\cos\alpha = m\upsilon_0\cos\alpha$ и $p_{0y} = p_0\sin\alpha = m\upsilon_0\sin\alpha$. У вектора $\vec{p}_1$ проекции: $p_{1x} = m\upsilon_0\cos\alpha$ и $p_{1y} = 0$. Так как $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$, то $\Delta p_x = p_{1x} - p_{0x} = 0$, а $\Delta p_y = p_{1y} - p_{0y} = -m\upsilon\sin\alpha$. Модуль вектора

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2} = m\upsilon_0\sin\alpha \Rightarrow \upsilon_0\sin\alpha = \frac{\Delta p}{m}.$$

Скорость в вертикальном направлении изменяется по закону $\upsilon_y(t) = \upsilon_0\sin\alpha - gt$. Так как в точке наивысшего подъема $\upsilon_y = 0$, то $\upsilon_0\sin\alpha - gt_1 = 0$ (t_1 – время движения до этой точки.) $\Rightarrow t_1 = \dfrac{\upsilon_0\sin\alpha}{g}$. Известно, что время подъема тела и время падения равны, поэтому время полета тела $t_n = 2t_1 = \dfrac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g} = \dfrac{2\Delta p}{mg}$.

Глава 3. Закон сохранения импульса. Механическая работа и энергия

3.1. Закон сохранения импульса системы

Импульсом системы тел называют векторную сумму

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n, \quad (3.1)$$

где $m_i\vec{v}_i$ – импульсы тел, входящих в систему.

Силы, с которыми взаимодействуют тела системы, называются **внутренними силами системы**. В любой системе сумма всех ее внутренних сил равна нулю, что является следствием третьего закона Ньютона.

Силы, которые действуют на тела системы со стороны других тел, не входящих в эту систему, называются **внешними силами**. Сумма внешних сил, действующих на систему, необязательно равна нулю. Если сумма внешних сил равна нулю, то систему называют **замкнутой**, если отлична от нуля, то система называется **незамкнутой**.

Для замкнутой системы выполняется закон сохранения импульса: геометрическая сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, остается постоянной при любых движениях и взаимодействиях тел системы.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из тел, масса которых равна $m_1, m_2,..., m_n$, а скорости $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ соответственно. Импульс такой системы назовем начальным и равным $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$. В результате взаимодействия между телами их скорости изменяются и становятся равными $\vec{v}_1', \vec{v}_2',..., \vec{v}_n'$. Импульс системы тел после взаимодействия называют конечным. В рассматриваемом случае он равен $\vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + ... + m_n\vec{v}_n'$.

По закону сохранения импульса $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ или

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + ... + m_n\vec{v}_n'. \quad (3.2)$$

Векторное равенство (3.2) равносильно системе трех скалярных равенств:

$$\begin{cases} P_{1x} = P_{2x}, \\ P_{1y} = P_{2y}, \\ P_{1z} = P_{2z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + ... + m_n v_{nx} = \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + ... + m_n v_{ny} = \\ m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + ... + m_n v_{nz} = \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' + ... + m_n v_{nx}', \\ &= m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' + ... + m_n v_{ny}', \\ &= m_1 v_{1z}' + m_2 v_{2z}' + ... + m_n v_{nz}', \end{aligned} \quad (3.3)$$

где P_{1x}, P_{1y}, P_{1z} – проекции начального импульса системы $\vec{P}_1$ на координатные оси X, Y, Z; P_{2x}, P_{2y}, P_{2z} – проекции конечного импульса $\vec{P}_2$; v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} – проекции скорости $\vec{v}_i$ i-го тела на оси координат X, Y, Z; $v_{ix}', v_{iy}', v_{iz}'$ – проекции скорости $\vec{v}_i'$ i-го тела на оси координат.

На практике редко встречаются системы, на которые не действуют внешние силы. Тем не менее можно указать несколько случаев, когда сохраняется импульс незамкнутой системы или его проекция на какое-либо направление.

1. Существует направление, на которое сумма проекций внешних сил равна нулю. Тогда импульс системы как вектор может и не сохраняться, но сохраняется проекция импульса на указанное направление.

2. Внешние силы действуют на систему в течение малого промежутка времени $\Delta t \to 0$, или система рассматривается за малый промежуток времени $\Delta t \to 0$. Тогда при условии, что внешние силы принимают конечные значения, импульс внешних сил $\vec{F}_{внеш}\Delta t \to 0$, и, следовательно, импульс системы в течение времени $\Delta t \to 0$ сохраняется.

3.2. Центр масс системы

Центр масс системы – это точка, радиус-вектор которой вычисляется по формуле:

$$\vec{R}_c(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + ... + m_n\vec{r}_n(t)}{m_1 + m_2 + ... + m_n}. \quad (3.4)$$

В формуле (3.4) $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – масса тел, входящих в

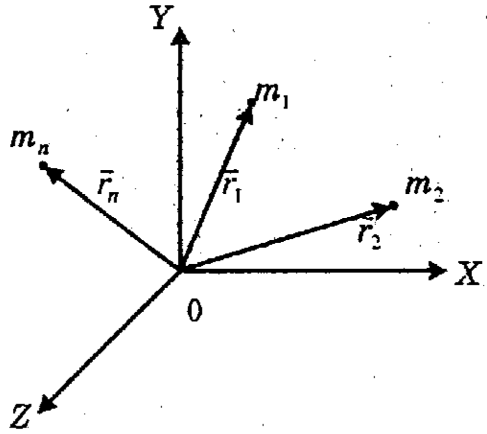


Рис. 3.1

систему, $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots, \vec{r}_n(t)$ – радиусы-векторы этих тел.

Векторное равенство (3.4) равносильно системе скалярных равенств:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \\ y_c = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \\ z_c = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \end{cases} \qquad (3.5)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты тела массой m_i. Продифференцировав равенство (3.4) по времени, получим:

$$\vec{R}'_c(t) = \frac{m_1 \vec{r}'_1(t) + m_2 \vec{r}'_2(t) + \ldots + m_n \vec{r}'_n(t)}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Как известно, производная от радиуса-вектора по времени есть мгновенная скорость, поэтому $\vec{r}'_i(t) = \vec{v}_i(t)$, а $\vec{R}'_c(t) = \vec{u}(t)$, где $\vec{u}(t)$ – скорость центра масс системы:

$$\vec{u}(t) = \frac{m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) + \ldots + m_n \vec{v}_n(t)}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (3.6)$$

Отметим, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M$ – масса всей системы, а $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{P}$ – импульс системы. Тогда из (3.6) легко получаем, что

$$M\vec{u} = \vec{P}. \qquad (3.7)$$

Следовательно, центр масс системы можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всей системы, и импульсом, равным импульсу всей системы.

Для центра масс системы можно записать основное уравнение динамики $\Delta\vec{P} = \left(\vec{F}_{внут} + \vec{F}_{внеш}\right)\Delta t$. Здесь $\vec{F}_{внут}$ – сумма всех внутренних сил системы, для любой системы равная нулю, а $\vec{F}_{внеш}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему. Таким образом, можно утверждать, что **центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.** Последнее утверждение называется **теоремой о движении центра масс системы.**

Если сумма внешних сил равна нулю (замкнутая система), то центр масс движется равномерно. В частном случае, если у него нет начальной скорости, центр масс покоится. Важно отметить, что тела, входящие в систему, могут при этом совершать разнообразные движения, центр масс же не будет изменять своего положения.

3.3. Механическая работа. Мощность

Механической работой постоянной силы называют скалярную величину

$$\boxed{A = FS\cos\alpha} \qquad (3.8)$$

где F – модуль силы, приложенной к телу, S – модуль совершенного телом перемещения, α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$ (рис.3.2).

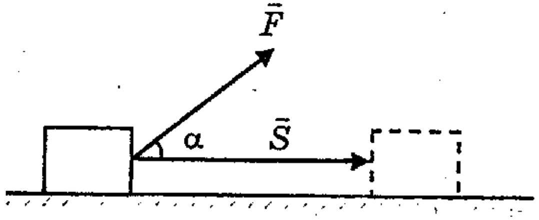


Рис. 3.2

Как видно из определения, механическая работа есть скалярное произведение векторов $\bar{F}$ и $\bar{S}$:

$$A = \bar{F}\bar{S}. \qquad (3.9)$$

Механическая работа– алгебраическая величина, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от угла α. Так, при $\alpha \in [0°,90°]$ $A > 0$, а при $\alpha \in [90°,180°]$ $A < 0$. Если направление силы перпендикулярно направлению перемещения, т.е. $\alpha = 90°$, то $A = 0$, если $\alpha = 0$, то $A = FS$, при $\alpha = 180°$ $A = -FS$.

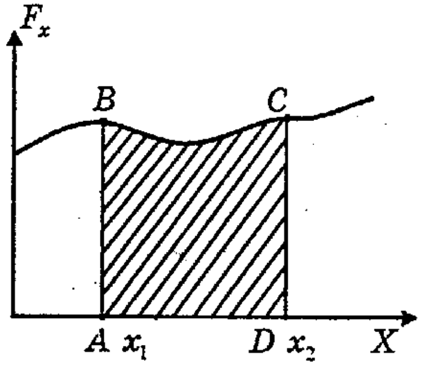


Рис. 3.3

Если сила – переменная величина, то ее работа численно равна площади криволинейной трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 3.3.

Здесь по оси X отложена проекция вектора перемещения $\bar{S}$, а по оси ординат – проекция силы $\bar{F}$ на направление перемещения. Таким образом, работу переменной силы можно вычислить по формуле

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\mathrm{d}x. \qquad (3.10)$$

Если к телу приложено несколько сил, то работа равнодействующей сил равна алгебраической сумме работ, совершенных каждой силой

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n. \qquad (3.11)$$

Мощностью называют работу, совершенную за 1 секунду. В случае, когда работа совершается равномерно во времени, мощность постоянная и равна

$$\boxed{N = \frac{A}{\Delta t}} \qquad (3.12)$$

где Δt – время, за которое совершена работа A. В общем случае мощность изменяется с течением времени, и ее мгновенное значение находят как производную от работы по времени

$$N(t) = A'(t). \qquad (3.13)$$

Мощность можно также рассчитать по формуле

$$\boxed{N = Fv} \qquad (3.14)$$

где F – модуль силы, v – модуль скорости тела.

Коэффициент полезного действия (КПД) механизма есть отношение полезной работы $A_п$ к затраченной $A_з$

$$\boxed{\eta = \frac{A_п}{A_з}100\%} \qquad (3.15)$$

3.4. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия тела – это скалярная физическая величина, характеризующая движущееся тело. Кинетическая энергия тела, масса которого m, а скорость v равна

$$\boxed{W_к = \frac{mv^2}{2}} \qquad (3.16)$$

Учитывая, что модуль импульса тела $p = mv$, выражаем скорость как $v = \frac{p}{m}$ и получаем, что кинетическая энергия равна

$$\boxed{W_к = \frac{p^2}{2m}} \qquad (3.17)$$

Под действием приложенной силы у тела возникает ускорение, а, значит, изменяется скорость от начальной v_1 до конечной v_2. Начальная кинетическая энергия тела $W_{к1} = \frac{mv_1^2}{2}$, конечная $W_{к2} = \frac{mv_2^2}{2}$. Изменение кинетической энергии есть разность между конечным и начальным значениями $\Delta W = W_{к2} - W_{к1}$.

Теорема о кинетической энергии утверждает, что изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей сил, приложенных к телу.

$$\boxed{\Delta W = W_{к2} - W_{к1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A} \qquad (3.18)$$

3.5. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тел. Система тел обладает потенциальной энергией, если тела взаимодействуют посредством сил, называемых **потенциальными (консервативными).** Основным свойством потенциальных сил является независимость работы, которую эти силы совершают, от траектории движения тела. Работа потенциальных сил зависит только от начальной и конечной точек движения. Работа потенциальных сил при перемещении тела по замкнутой траектории равна нулю.

Работа потенциальных сил A равна изменению потенциальной энергии, взятому со знаком минус:

$$\boxed{A = -\Delta W_p = -\left(W_{p2} - W_{p1}\right)} \qquad (3.19)$$

где W_{p1} и W_{p2} – начальное и конечное значения потенциальной энергии, ΔW_p – ее изменение.

Потенциальная энергия зависит от координат взаимодействующих тел, поэтому ее значение зависит от того, где выбран нулевой уровень.

В механике рассматриваются две вида потенциальной энергии: **потенциальная энергия тела в гравитационном поле (поле тяжести) и потенциальная энергия упругой деформации.**

Потенциальная энергия тела массой m, находящегося на высоте h над поверхностью Земли, равна

$$\boxed{W_p = mgh} \qquad (3.20)$$

При этом предполагается, что нулевой уровень потенциальной энергии находится на поверхности Земли. Отметим, что формула (3.20) справедлива у поверхности Земли, когда $\vec{g}$ можно считать постоянной величиной. В общем случае гравитационного взаимодействия двух тел массой m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r, потенциальная энергия вычисляется по формуле

$W_p = -G\dfrac{m_1 m_2}{r} + C$, причем, как правило, нулевой уровень энергии соответствует тому, что тела находятся на очень большом расстоянии друг от друга $(r \to \infty)$. Отсюда следует, что $W_p(\infty) = 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$. Окончательно

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (3.21)$$

По закону Гука при упругой деформации проекция силы упругости $F_{упр} = -kx$, где x – величина деформации, а k – коэффициент упругости. Для вычисления ее работы воспользуемся формулой

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_{упр}(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right).$$

В этом случае работу можно представить как изменение величины

$$\boxed{W_{упр} = \frac{kx^2}{2}} \qquad (3.22)$$

которую называют **потенциальной энергией упругой деформации.**

3.6. Полная механическая энергия

Механическая энергия представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергии

$$\boxed{W = W_p + W_к} \qquad (3.23)$$

Закон сохранения механической энергии утверждает, что полная механическая энергия тел, взаимодействующих с силами тяготения или силами упругости, остается неизменной при любых движениях тел системы.

$$\boxed{W_p + W_к = \text{const}} \qquad (3.24)$$

Полная механическая энергия сохраняется не всегда. На систему или в системе могут действовать силы трения, силы сопротивления. Такие силы являются непотенциальными (неконсервативными). Работа A этих сил приводит к уменьшению полной механической энергии:

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = A} \qquad (3.25)$$

где W_1 и W_2 – начальное и конечное значения механической энергии, причем $W_2 < W_1$. Следует также иметь в виду, что работа сил трения и сопротивления отрицательна, т.е. $A < 0$, так как эти силы всегда направлены противоположно вектору перемещения. При этом начальная механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде теплоты). По закону сохранения энергии можно записать, что

$$\boxed{W_1 = W_2 + Q} \qquad (3.26)$$

где W_1 – начальная, а W_2 – конечная механическая энергия системы, Q – количество выделившейся теплоты.

3.7. Упругие и неупругие столкновения

Во многих задачах физики рассматриваются упругие и неупругие столкновения (удары). Если при столкновении механическая энергия системы сохраняется, то столкновение называется **упругим (абсолютно упругим)**; если механическая энергия системы не сохраняется, то говорят о **неупругом столкновении**. Достаточным признаком неупругого столкновения является движение тел как одного целого после столкновения. В этом случае говорят об абсолютно неупругом столкновении. Однако столкновение может быть неупругим и тогда, когда после него тела двигаются раздельно. При этом неупругость столкновения оговаривается в условии задачи либо из условия следует.

После упругого столкновения тела обязательно движутся раздельно. Упругость столкновения должна быть четко оговорена в условии задачи или явным образом из него следовать.

Поскольку столкновения рассматриваются между телами, образующими, как правило, замкнутую систему, то для количественного описания упругих столкновений используется закон сохранения механической энергии и импульса системы, а для описания неупругих столкновений применяют только закон сохранения импульса системы.

Из свойств столкновений следует, что при упругих столкновениях теплота не выделяется, а при неупругих столкновениях механическая энергия систем частично или полностью переходит во внутреннюю.

Столкновения также подразделяются на центральные и нецентральные. При центральных столкновениях скорости тел до и после столкновения направлены вдоль одной и той же прямой (линии центров). При нецентральных столкновениях скорости тел отклоняются от своего первоначального направления.

3.8. Примеры решения задач

Задача 3.1. Пуля массой m попадает в неподвижный брусок, покоившийся на горизонтальной поверхности. Масса бруска – M, скорость пули v_0 направлена горизонтально. Пуля застревает в бруске. Определить начальную скорость движения бруска после попадания пули (рис.3.4).

Решение.

Рассмотрим систему, в которую входят два тела: брусок и пуля. Эта система не является замкнутой, так как на нее действуют внешние силы: сила тяжести, сила реакции опоры и, возможно, сила трения. Отметим, что проекции $\vec{N}$ и $M\vec{g}$ на горизонтальное направление равны нулю. Если трения нет, то сохраняется проекция импульса системы на ось X. Если же трение между бруском и плоскостью есть, то надо учесть, что система рассматривается за очень малое время $\Delta t \to 0$ (Δt – время взаимодействия между пулей и бруском). Следовательно, импульс силы трения стремится к нулю, т.е. импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется и в этом случае.

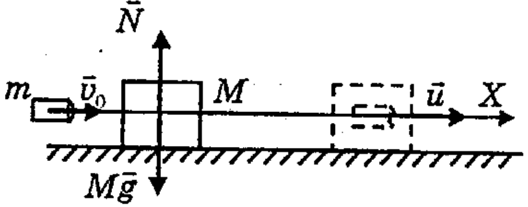


Рис. 3.4

Проекция начального импульса системы $P_{1x} = mv_0 + M \cdot 0 = mv_0$. Проекция конечного импульса системы $P_{2x} = mu + Mu = (m + M)u$, где u – скорость, с которой начинает двигаться брусок вместе с пулей. Так как $P_{1x} = P_{2x}$, то $mv_0 = (m + M) \cdot u \Rightarrow u = \dfrac{mv_0}{m + M}$.

Задача 3.2. Снаряд, который летел в горизонтальном направлении со скоростью v, разрывается на два осколка массой m_1 и m_2. Скорость осколка массой m_1 равна v_1 и направлена вертикально вверх. Определить модуль и направление скорости осколка массой m_2 (рис.3.5).

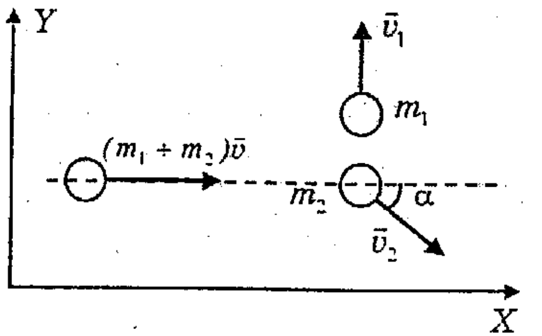


Рис. 3.5

Решение.

На систему, состоящую из двух осколков массой m_1 и m_2, в горизонтальном направлении X внешние силы не действуют, поэтому импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется, т.е. $P_{1x} = P_{2x}$. В вертикальном направлении Y на систему действует внешняя сила – сила тяжести. Но поскольку время разрыва снаряда мало, сохраняется импульс системы и в вертикальном направлении, т.е. $P_{1y} = P_{2y}$. Начальный импульс системы в направлении X $P_{1x} = (m_1 + m_2)v$, конечный $P_{2x} = m_2 v_2 \cos\alpha$. Начальный импульс системы в направлении Y: $P_{1y} = 0$, конечный $P_{2y} = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin\alpha$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)v = m_2 v_2\cos\alpha,\\ 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin\alpha,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 v_2 \cos\alpha = (m_1+m_2)v & (1),\\ m_2 v_2 \sin\alpha = m_1 v_1 & (2).\end{cases}$$

После деления уравнения (2) системы на (1) найдем, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2)v} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2)v}.$$

Возведя в квадрат уравнения (1) и (2) системы, а затем их складывая, найдем, что

$$(m_2 v_2)^2\cos^2\alpha + (m_2 v_2)^2\sin^2\alpha = ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1 v_1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_2 v_2)^2 = ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1 v_1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2 v^2 + m_1^2 v_1^2}}{m_2}.$$

Задача 3.3. По гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 движется тележка. На тележке находится человек, масса которого M, масса тележки – m. Человек начинает двигаться с постоянной скоростью по тележке в том же направлении, что и тележка. При какой скорости человека скорость тележки уменьшится в 2 раза?

Решение.

На систему тел, состоящую из человека и тележки, в горизонтальном направлении не действуют внешние силы. Поэтому импульс этой системы в горизонтальном направлении сохраняется. Пока человек относительно тележки покоится, импульс системы $P_1 = (m+M)v_0$. Когда человек движется со скоростью v относительно Земли, скорость тележки равна $v_0/2$, и импульс системы $P_2 = Mv + m\dfrac{v_0}{2}$. Так как $P_1 = P_2$, то

$$(m+M)v_0 = Mv + \frac{mv_0}{2} \Rightarrow v_0\left(\frac{m}{2}+M\right) = Mv \Rightarrow$$

$$v = v_0\left(1+\frac{m}{2M}\right).$$

Используя закон сложения скоростей, можно определить скорость человека относительно тележки:

$$v_{отн} = v - \frac{v_0}{2} = v_0\left(1+\frac{m}{2M}\right) - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Задача 3.4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородная доска массой m и длиной L. Человек, масса которого $2m$, переходит с одного конца доски на ее середину. На сколько при этом сместится доска? (рис. 3.6).

Решение.

В горизонтальном направлении на систему человек-доска внешние силы не действуют, поэтому центр масс этой системы остается на месте. Введем горизонтальную ось X, ее начало поместим в точку O.

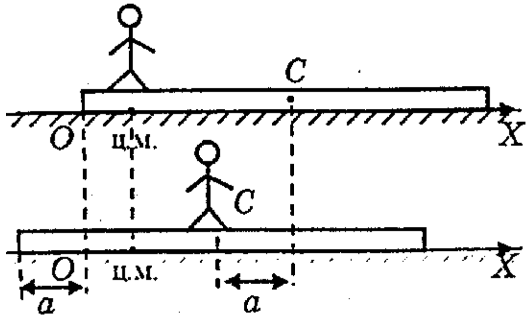


Рис. 3.6

$x_ч = 0, x_c = \frac{L}{2}$, где $x_ч$ – координата человека, x_c – координата центра масс доски. По формуле (3.5) находим положение центра масс системы человек-доска:

$$x_{ц.м} = \frac{x_ч 2m + x_c m}{3m} = \frac{L/2\, m}{3m} = \frac{L}{6}.$$

Во втором случае

$$x'_ч = \frac{L}{2} - a,\ x'_c = \frac{L}{2} - a,$$ где

a – смещение доски.

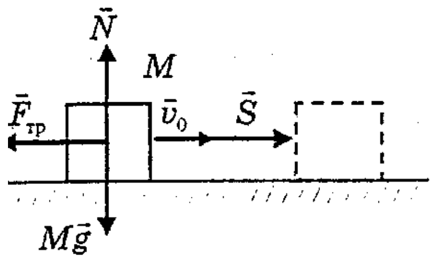


Рис. 3.7

$$x'_{ц.м} = \frac{x'_ч 2m + x'_c m}{3m} = \frac{(L/2 - a)2m + (L/2 - a)m}{3m} = \frac{3(L/2 - a)m}{3m} = \frac{L}{2} - a.$$

Так как центр масс системы остался на месте, то

$$x_{ц.м} = x'_{ц.м} \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{L}{2} - a \Rightarrow a = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{1}{3}L.$$

Задача 3.5. Телу, находившемуся на горизонтальной поверхности (рис. 3.7), сообщили скорость v_0. Какое расстояние пройдет тело до полной остановки, если коэффициент трения тела о поверхность равен μ?

Решение.

Начальная механическая энергия тела $W_1 = W_{k1} = \frac{Mv_0^2}{2}$. Конечная механическая энергия $W_2 = 0$. Изменение механической энергии равно работе силы трения. В нашей задаче $F_{тр} = \mu N = \mu Mg$. $A_{тр} = F_{тр} S\cos 180° = -\mu MgS$ (S – модуль вектора перемещения, т.е. расстояние, которое проходит тело до остановки). Подставив в уравнение $\Delta W = W_2 - W_1 = A_{тр}$ значения $W_1, W_2, A_{тр}$, получим

$$0 - \frac{Mv^2}{2} = -\mu MgS \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \mu gS \Rightarrow S = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Задача 3.6. Конькобежец, разогнавшись до скорости v_0, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня въедет конькобежец, если склон горы составляет угол α с горизонтом и коэффициент трения коньков о лед – μ?

Решение.

В точке 1 (рис. 3.8) начальная механическая энергия конькобежца $W_1 = W_{p1} + W_{k1} = \frac{mv_0^2}{2}$. В точке 2 механическая энергия конькобежца $W_2 = W_{p2} + W_{k2} = mgh$. В процессе движения на конькобежца действуют силы: силы тяжести $m\vec{g}$ (консервативная сила), сила реакции опоры $\vec{N}$ (сразу отметим, что работа этой силы

$$A_N = NS\cos 90° = 0),$$

сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ (неконсервативная сила). Механическая энергия конькобежца изменяется, причем $W_2 - W_1 = A_{тр}$ (1).

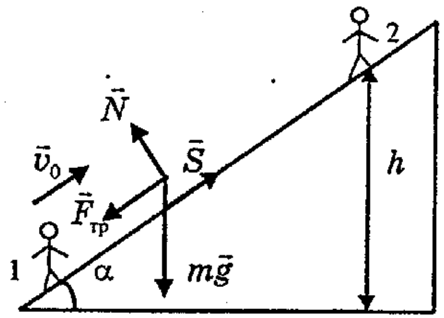


Рис. 3.8

$F_{тр} = \mu N$, где $N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Определим работу силы трения: $A_{тр} = F_{тр}S\cos 180° = -F_{тр}S = -(\mu mg\cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha} = -\mu mgh\,\mathrm{ctg}\alpha$. Подставив в (1), получим уравнение относительно h:

$$mgh - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgh\,\mathrm{ctg}\alpha \Rightarrow gh(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\alpha) = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \mu\,\mathrm{ctg}\alpha)}.$$

Задача 3.7. Из духового ружья стреляют в спичечный коробок, лежащий на расстоянии $l = 30$ см от края стола. Пуля массой $m = 1$ г, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 150$ м/с, пробивает коробок и вылетает из него со скоростью $v_0/2$. Масса коробки $M = 50$ г. При каких значениях коэффициента трения μ между коробком и столом коробок упадет со стола?

Решение.

После попадания пули в коробок он приобретает скорость $\vec{u}$. Найдем эту скорость, используя сохранение импульса системы коробок-пуля в горизонтальном направлении. До попадания пули импульс системы $P_{1x} = mv_0$, сразу после попадания

$$P_{2x} = m\frac{v_0}{2} + Mu,\quad P_{1x} = P_{2x} \;\Rightarrow\; mv_0 = m\frac{v_0}{2} + Mu \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow u = \dfrac{mv_0}{2M}$. Рассмотрим отдельно движение коробка. В положении 1 (рис. 3.9) его механическая энергия $W_1 = \dfrac{Mu^2}{2}$ (нулевое значение потенциальной энергии здесь выбрано на поверхности стола). В положении 2

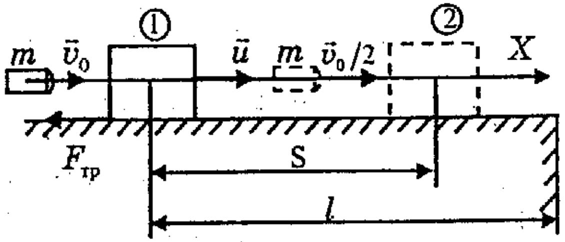


Рис. 3.9

$W_2 = 0$ (коробок остановился). Механическая энергия коробка изменилась на величину работы силы трения $W_2 - W_1 = A_{тр}$ (1). Вычислим работу силы трения при движении по горизонтальной поверхности. В данном случае $F_{тр} = \mu N = \mu Mg \Rightarrow A_{тр} = F_{тр}S\cos 180° = -\mu MgS$, где S – путь, пройденный коробком до остановки. Подставив в (1), получим

$$0 - \frac{Mu^2}{2} = -\mu MgS \Rightarrow \quad S = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{(mv_0\ 2M)^2}{2\mu g} = \frac{m^2v_0^2}{8M^2\mu g}.$$

Коробок упадет со стола, если

$$S \ge l \Rightarrow \frac{m^2v_0^2}{8M^2\mu g} \ge l \Rightarrow \mu \le \frac{v_0^2}{8gl}\left(\frac{m}{M}\right)^2,\quad \mu \le 0{,}38.$$

Задача 3.8. Для забивания сваи массой $m = 100$ кг используется груз массой $M = 400$ кг, который свободно падает с высоты $H = 2$ м. На какую глубину свая уходит в землю в результате одного удара груза? Удар груза о сваю абсолютно неупругий. Средняя сила сопротивления грунта $F_c = 70$ кН.

Решение.

Груз, расположенный на высоте H по отношению к свае, обладает потенциальной энергией $W_1 = MgH$. Перед ударом о сваю груз имеет скорость v и его кинетическая энергия $W_2 = \dfrac{Mv^2}{2}$. По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow MgH = \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gH}.$$

Рассмотрим систему, состоящую из груза и сваи. Импульс этой системы перед ударом $P_1 = Mv$ (имеется в виду проекция импульса на вертикальное направление). Так как удар абсолютно неупругий, то после удара груз и свая начинают двигаться вместе со скоростью u, причем импульс системы $P_2 = (M + m)u$. Считая длительность удара малой, можем утверждать, что импульс сохраняется, т.е. $P_1 = P_2 \Rightarrow Mv = (M+m)u \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{Mv}{m+M}.$$

Предположим теперь, что нулевое значение потенциальной энергии в поле тяжести земли находится на уровне центра тяжести системы груз-свая. Тогда механическая энергия системы сразу после удара $W_1' = \dfrac{(M+m)u^2}{2}$. Так как свая вместе с грузом уходит в землю на некоторую глубину h и при этом останавливается, то конечная механическая энергия системы $W_2' = -(M+m)gh$. Изменение механической энергии системы равно работе сил сопротивления грунта $A = F_c h \cos 180° = -F_c h$ (сила сопротивления направлена противоположно вектору перемещения). Итак,

$$\Delta W = W_2' - W_1' = A \Rightarrow$$

$$-(M+m)gh - \frac{(M+m)u^2}{2} = -F_c h \Rightarrow$$

$$(F_c - (M+m)g)h = \frac{(M+m)u^2}{2} \Rightarrow$$

$$h = \frac{(M+m)u^2}{2(F_c - (M+m)g)} = \frac{M^2 gH}{(M+m)(F_c - (M+m)g)} = 0{,}1 \text{ м}.$$

Задача 3.9. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в брусок, подвешенный на нити длиной $l = 4$ м, и застревает в нем. Определить угол α, на который отклонится брусок, если масса пули $m = 20$ г, а бруска – $M = 5$ кг. Определить количество теплоты, выделившееся при попадании пули в брусок.

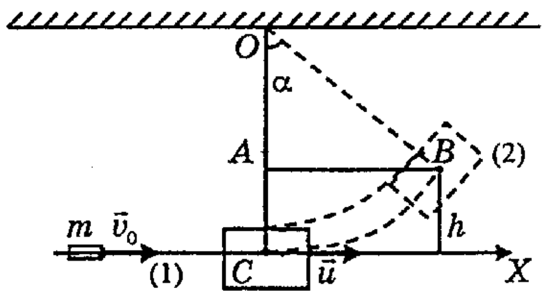


Рис. 3.10

Решение.

Попадание пули в брусок – это пример неупругого столкновения. После попадания пули скорость бруска и пули – $\vec{u}$. Найдем ее, используя сохранение импульса системы пуля-брусок в горизонтальном направлении X.

Получим:

$mv_0 = (M+m)u \Rightarrow u = \dfrac{mv_0}{m+M}$. В состоянии (1) механическая энергия системы $W_1 = \dfrac{(M+m)u^2}{2}$, а в состоянии (2) $W_2 = (m+M)gh$. После попадания пули на участке (1)-(2) механическая энергия сохраняется, т.е.

$W_1 = W_2 = \dfrac{(M+m)u^2}{2} = = (m+M)gh \Rightarrow h = \dfrac{u^2}{2g}$. Проведем $AB \perp OC$. В ΔAOB $AO = l - h$, $OB = l$, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{u^2}{2gl} =$$

$$= 1 - \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{v_0^2}{2gl}.\ \cos\alpha = 0{,}97;\ \alpha = 15°.$$

До попадания пули в брусок механическая энергия системы $W' = \dfrac{mv_0^2}{2} > W_1$ (так как столкновение неупругое). Поэтому количество выделившейся теплоты

$$Q = W' - W_1 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} =$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)}{2}\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2 = = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right) =$$

$$\frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{m}{M}}\right).$$

Из последней формулы видно, что при $\frac{m}{M} \to 0(m << M)$ практически вся начальная кинетическая энергия пули переходит в теплоту.

$$Q = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot \left(4 \cdot 10^2\right)^2}{2} = 1600 \text{ Дж}.$$

Задача 3.10. Шарик массой m свободно падает с высоты H на горизонтальную плоскость и отскакивает от нее. При ударе о плоскость выделяется количество теплоты, равное Q. Найти высоту, на которую подпрыгнет шарик после удара, а также среднюю силу, с которой шарик действует на плоскость, если время удара равно Δt.

Решение.

На высоте H механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии $W_1 = mgH$. Пусть шарик подпрыгивает после удара на высоту h, тогда его механическая энергия в этой точке $W_2 = mgh$. Закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты запишется в виде:

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow mgH = mgh + Q \Rightarrow h = H - \frac{Q}{mg}.$$

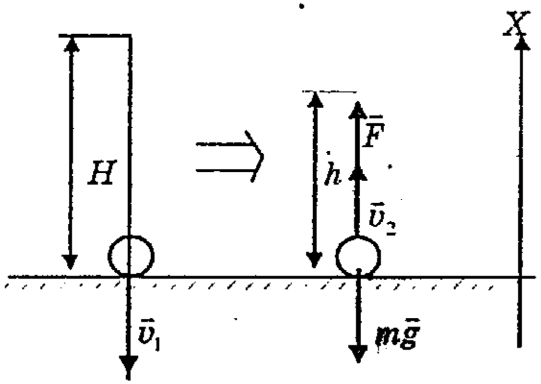


Рис. 3.11

Пусть скорость шарика перед ударом равна v_1, тогда его механическая энергия перед ударом $W_1' = \frac{mv_1^2}{2}$.

По закону сохранения механической энергии

$W_1 = W_1' \Rightarrow$

$mgH = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$

$v_1 = \sqrt{2gH}$. Пусть $\bar{v}_2$ – скорость шарика после удара, тогда его механическая энергия после удара $W_2' = \frac{mv_2^2}{2}$. Так как $W_2 = W_2'$, то $v_2 = \sqrt{2gh}$.

Импульс шарика перед ударом $\bar{p}_1 = m\bar{v}_1$, а его проекция на вертикальное направление X равна $p_{1x} = -mv_1$. Импульс шарика после удара $\bar{p}_2 = m\bar{v}_2$, его проекция $p_{2x} = mv_2$. В соответствии с основным уравнением динамики изменение импульса тела равно импульсу действующей силы. Во время удара на шарик действуют: сила тяжести $m\bar{g}$ и сила со стороны плоскости $\bar{F}$. Проекция этих сил: $F - mg$, а ее импульс: $(F - mg)\Delta t = p_{2x} - p_{1x} \Rightarrow (F - mg)\Delta t =$

$$= mv_2 - (-mv_1) = m(v_1 + v_2) \Rightarrow F = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} + mg =$$

$$= m\left(\frac{\sqrt{2gH} + \sqrt{2g(H - Q/mg)}}{\Delta t} + g\right).$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю средней силой шарик действует на плоскость.

Задача 3.11. Тело массой M под действием пружины совершает колебания с амплитудой A_0 на гладком горизонтальном столе. В момент, когда тело проходит положение равновесия, на него сверху падает и прилипает к нему кусок пластилина массой m. Чему будет равна амплитуда колебаний?

Решение.

В момент наибольшего отклонения тела от положения равновесия (рис. 3.12) его потенциальная энергия $W_{p1} = \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}$ (k – коэффициент жесткости пружины), а кинетическая энергия $W_{k1} = 0$ (так как

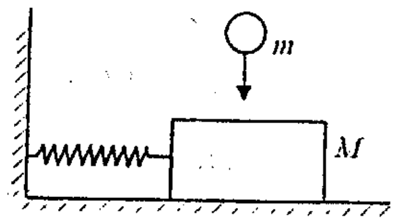


Рис. 3.12

$\upsilon = 0$). Полная механическая энергия в данном случае $W_1 = W_{p1} = \dfrac{kA_0^2}{2}$. Когда тело проходит положение равновесия, $W_{p2} = 0$ (так как деформация пружины равна 0), а кинетическая энергия $W_{\kappa 2} = \dfrac{m\upsilon_0^{\;2}}{2}$. Механическая энергия в этом случае $W_2 = W_{\kappa 2} = \dfrac{m\upsilon_0^{\;2}}{2}$. Трение отсутствует, поэтому механическая энергия сохраняется, т.е.

$W_1 = W_2 \Rightarrow \dfrac{M\upsilon^2}{2} = \dfrac{kA_0^2}{2} \Rightarrow \upsilon = A_0\sqrt{\dfrac{k}{M}}$. После прилипания куска пластилина скорость груза изменится, станет равной u. Выразим эту скорость, используя сохранение импульса системы тело M -пластилин m в горизонтальном направлении. До падения пластилина импульс системы $P_{1x} = M\upsilon$, сразу после прилипания $P_{2x} = (M + m)u$; $P_{1x} = P_{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\upsilon = (M + m)u \Rightarrow u = \frac{M\upsilon}{M + m}.$$

В этот момент система будет обладать механической энергией $W_1' = W_{p1}' + W_{\kappa 1}' = \dfrac{(M + m)u^2}{2}$.

В момент наибольшего отклонения механическая энергия системы $W_2' = W_{p2}' + W_{\kappa 2}' = \dfrac{kA^2}{2}$, где A – новое значение амплитуды колебаний. Так как

$$W_1' = W_2' \Rightarrow \frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = u\sqrt{\frac{M + m}{k}} = \left(\frac{M\upsilon}{M + m}\right)\sqrt{\frac{M + m}{k}} = A_0\sqrt{\frac{M}{M + m}}.$$

Задача 3.12. Пружина, массой которой можно пренебречь, стоит на столе вертикально. Длина пружины l. С высоты H над столом ($H > l$) падает небольшой шарик массой m и попадает на пружину. Максимальная скорость шарика при движении вниз равна υ_m. Найти коэффициент жесткости пружины k.

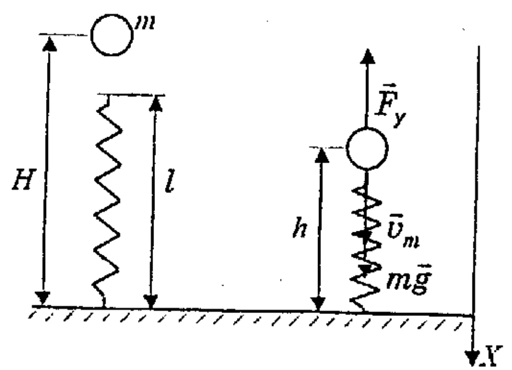


Рис. 3.13

Решение.

До попадания на пружину шарик свободно падает с ускорением свободного падения $\vec{g}$ (рис. 3.13). Скорость шарика при этом возрастает. Когда шарик оказался на пружине, на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $F_y = k\Delta x$, где Δx – сжатие пружины. По второму закону Ньютона ускорение шарика $a = \dfrac{mg - F_y}{m} = g - \dfrac{F_y}{m} < g$, причем ускорение шарика не постоянно. До тех пор, пока проекция ускорения на ось X положительна, скорость шарика возрастает. Скорость достигает максимального значения в тот момент, когда ее производная, т.е. ускорение, обращается в 0. Из условия $a = 0$ находим $mg - F_y = 0 \Rightarrow mg = F_y = k(l - h)$ (1), где h – высота, на которой оказался шарик в момент, когда его скорость максимальна. В начальной точке движения механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии в поле тяжести земли $W_1 = mgH$. На высоте h механическая энергия состоит из потенциальной энергии в поле тяжести Земли, кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации: $W_2 = mgh + \dfrac{m\upsilon_m^2}{2} + \dfrac{k(l - h)^2}{2}$. По закону сохранения механической энергии $W_1 = W_2 \Rightarrow$

$$mgH = mgh + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{k(l-h)^2}{2}$$

(2). Выразим из уравнения (1) $h = l - \frac{mg}{k}$ и подставим в уравнение (2). Получим

$$mgH = mgl + \frac{mv_m^2}{2} - \frac{(mg)^2}{2k} \Rightarrow \frac{mg^2}{2k} = \frac{v_m^2}{2} + g(l - H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{mg^2}{v_m^2 - 2g(H - l)}.$$

Задача 3.13. Две частицы массой m_1 и m_2, со скоростью $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ соответственно, сталкиваются абсолютно упруго. Определить скорость частиц после столкновения, которое является центральным (рис. 3.14).

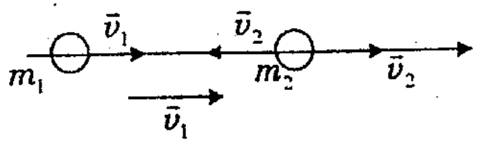


Рис. 3.14

Решение.

Предложенная задача представляет собой самый общий случай абсолютно упругого центрального столкновения двух частиц. Скорости $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ могут быть направлены в одну сторону. При абсолютно упругом столкновении сохраняется импульс системы и ее механическая энергия. Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2}. \end{cases}$$

Здесь v_1', v_2' – скорости частиц после столкновения.

Метод решения систем данного вида всегда одинаков. В левой части уравнений группируют члены, содержащие множителем m_1, а в правой – m_2.

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \\ m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2). \end{cases}$$

Далее второе уравнение делят на первое и получают систему:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \\ v_1 + v_1' = v_2' + v_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2' = v_1 + v_1' - v_2, \\ m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1 + v_1' - 2v_2), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2' = v_1 + v_1' - v_2, \\ m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1' - 2m_2 v_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2' = v_1 + v_1' - v_2, \\ v_1'(m_1 + m_2) = v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Эти формулы не надо запоминать, но есть несколько частных случаев, которые необходимо хорошо знать.

1. Если $m_1 = m_2$, то $\begin{cases} v_2' = v_1, \\ v_1' = v_2. \end{cases}$

В этом случае говорят, что частицы обмениваются скоростями.

2. Если $m_1 = m_2$ и $v_2 = 0$, а $v_1 \neq 0$, то $\begin{cases} v_2' = v_1, \\ v_1' = 0. \end{cases}$

3. Если $m_1 << m_2$ ($\frac{m_1}{m_2} \to 0$), то выражения для скоростей преобразуем так, чтобы они содержали отношение $\frac{m_1}{m_2}$. Для этого в числителе и знаменателе вынесем за скобки m_2:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\left(\dfrac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1 + 2v_2}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}, \\ v_2' = \dfrac{\left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right)v_2 + 2\dfrac{m_1}{m_2}v_1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}. \end{cases}$$

Так как $\frac{m_1}{m_2} \to 0$, то $\begin{cases} v_1' = -v_1 + 2v_2, \\ v_2' = v_2. \end{cases}$

4. Если $m_1 << m_2$ ($\frac{m_1}{m_2} \to 0$) и $v_2 = 0$, а $v_1 \neq 0$, то

$$\begin{cases} v_2' = 0, \\ v_1' = -v_1, \end{cases}$$

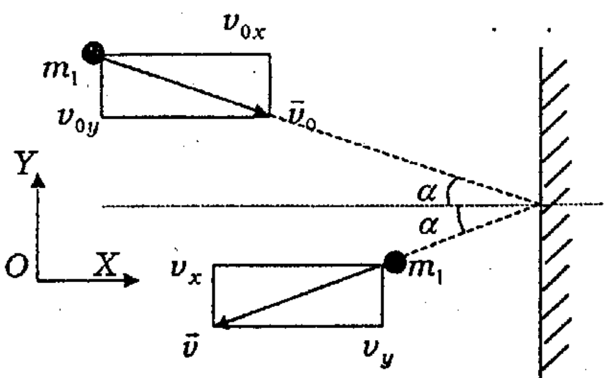


Рис. 3.15

т.е. более массивная частица остается на месте, а более легкая отскакивает от нее с такой же по модулю скоростью. Как правило, в задачах роль более массивного тела выполняет стенка. Можно доказать, что когда частица упруго сталкивается со стенкой, то проекция скорости на направление, перпендикулярное стенке (OX), изменяет свой знак $v_{0x} = -v_x$ (рис. 3.15). Проекция скорости на направление, параллельное стенке (OY), остается неизменной: $v_{0y} = v_y$. Следствием этого является то, что не изменяется модуль скорости $v_0 = v$, а также угол падения равен углу отражения от стенки.

Задача 3.14. Два небольших упругих шарика подвешены на нитях длиной $l_1 = 10$ см и $l_2 = 5$ см так, что они соприкасаются, линия их центров горизонтальна, а нити вертикальны. Масса шариков $m_1 = 4$ г и $m_2 = 20$ г. Шарик массой m_1 отклоняют на угол $\alpha = 60°$ от вертикали и отпускают. На какие углы отклонятся нити после абсолютно упругого соударения шариков?

Решение.

При отклонении нити с первым шариком на угол α он поднимется на высоту h от начального уровня (рис. 3.16). Найдем связь между α и h. Из ΔAOB: $OB = l_1\cos\alpha$,

$$BD = OD - OB = l_1 - l_1\cos\alpha = l_1(1 - \cos\alpha) = h \quad (1).$$

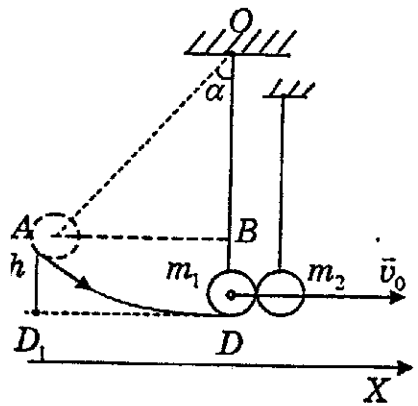


Рис. 3.16

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне DD_1. Механическая энергия шарика в точке A равна его потенциальной энергии в этой точке $W_A = m_1gh$. Механическая энергия шарика m_1 в точке D равна его кинетической энергии в этой точке: $W_D = \frac{m_1v_0^2}{2}$, где v_0 – скорость перед столкновением со вторым шариком. По закону сохранения механической энергии

$$W_D = W_A \Rightarrow m_1gh = \frac{m_1v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Скорость шариков после столкновения равна υ_1 и υ_2 соответственно (рис. 3.17). Рассмотрим систему, состоящую из двух шариков. Механическая энергия этой системы перед столкновением равна кинетической энергии шарика m_1:

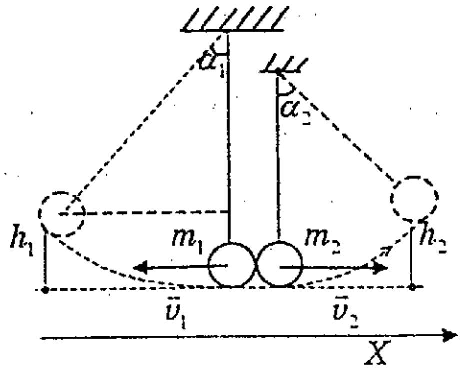


Рис. 3.17

$W_0 = \dfrac{m_1\upsilon_0^2}{2}$, механическая энергия системы сразу после столкновения равна сумме кинетических энергий шариков:

$W_к = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2}$. Импульс системы перед столкновением шариков равен импульсу шарика m_1, его проекция на горизонтальное направление X равна $P_0 = m_1\upsilon_0$. Импульс системы после столкновения $P_к = m_2\upsilon_2 + (-m_1\upsilon_1) = m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1$. Так как столкновение абсолютно упругое, то механическая энергия и импульс системы сохраняются, т.е. $W_0 = W_к$ и $P_0 = P_к$. Получаем систему уравнений относительно υ_1 и υ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2}, \\ m_1\upsilon_0 = m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1\left(\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2\right) = m_2\upsilon_2^2, \\ m_1(\upsilon_0 + \upsilon_1) = m_2\upsilon_2. \end{cases}$$

После деления первого уравнения системы на второе находим $\upsilon_0 - \upsilon_1 = \upsilon_2$. Подставляя во второе уравнение, получим:

$$m_1(\upsilon_0 + \upsilon_1) = m_2(\upsilon_0 - \upsilon_1) \Rightarrow (m_1 + m_2)\upsilon_1 =$$

$$= (m_2 - m_1)\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \text{ и } \upsilon_2 = \frac{2m_1\upsilon_0}{m_1 + m_2}.$$

Так как $m_2 > m_1$, то $\upsilon_1 > 0$ и, следовательно, предположение о направлении скорости $\vec{\upsilon}_1$ верно.

Далее рассматриваем движение каждого шарика отдельно. Используя закон сохранения механической энергии, получаем $\dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} = m_1gh_1$, где h_1 – наибольшая высота подъема шарика m_1 после столкновения. Находим $h_1 = \dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$. По формуле (1) находим

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{h_1}{l_1} = 1 - \frac{\upsilon_1^2}{2gl_1} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2gl_1} =$$

$$= 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \cdot \frac{2gh}{2gl_1} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \cdot (1 - \cos\alpha) =$$

$$= \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\frac{7}{9} = 38{,}9°.$$

Аналогично находим

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{h_2}{l_2} = 1 - \frac{\upsilon_2^2}{2gl_2} = 1 - \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2gl_2} =$$

$$= 1 - \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \cdot \frac{2}{gl_2} \cdot 2gh =$$

$$= 1 - 4 \cdot (1 - \cos\alpha)\frac{l_1}{l_2}\left(\frac{m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 = \frac{89}{90} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \arccos\frac{89}{90} = 8{,}5°.$$

Задача 3.15. На горизонтальной плоскости покоится шар. С ним сталкивается другой шар с такой же массой. Удар абсолютно упругий и нецентральный. Определить угол, под которым разлетаются шары после удара (рис.3.18).

Решение.

Так как удар упругий, то сохраняется импульс системы и ее механическая энергия. Пусть скорости шаров после удара – $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, тогда по закону сохранения импульса:

$m\bar{v} = m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2 \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Это равенство показывает, что векторы $\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ образуют треугольник (рис. 3.18). По закону сохранения механической энергии можно записать, что

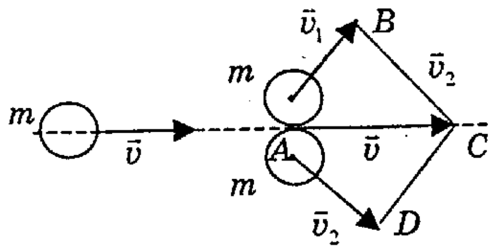


Рис. 3.18

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

$\Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$, т.е. в ΔABC $\angle ABC = 90°$. Так как четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, то $\angle BAD = 90°$. $\angle BAD$ – искомый угол разлета шаров.

Задача 3.16. Два идеально гладких шара одинакового радиуса и массы покоятся, касаясь друг друга, на гладкой горизонтальной поверхности. Третий шар того же радиуса и массы налетает на них со скоростью v_0, двигаясь по той же поверхности вдоль прямой, касающейся обоих шаров. Найти скорости шаров после столкновения (рис. 3.19).

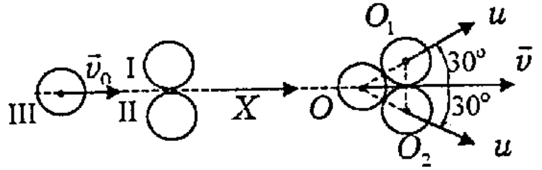


Рис. 3.19

Решение.

Пусть v – скорость третьего шара, а u – модуль скорости первого и второго шаров после столкновения. ΔOO_1O_2 – равносторонний, поэтому $\angle O_1OO_2 = 60°$.

При абсолютно упругом столкновении сохраняется механическая энергия системы и ее импульс. Механическая энергия системы до столкновения есть кинетическая энергия первого шара $W_1 = \dfrac{mv_0^2}{2}$. Механическая энергия системы после столкновения $W_2 = \dfrac{mv^2}{2} + 2 \cdot \dfrac{mu^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mu^2$.

Импульс системы до столкновения в направлении X $P_{1x} = mv_0$, после столкновения – $P_{2x} = mv + 2mu\cos 30° = mv + \sqrt{3}mu$.

Так как $W_1 = W_2$ и $P_{1x} = P_{2x}$, то получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mu^2, \\ mv_0 = mv + \sqrt{3}mu, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0^2 - v^2 = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v_0 - v)(v_0 + v) = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 + v = \dfrac{2}{\sqrt{3}}u, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)u, \\ 2v = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{2\sqrt{3}v_0}{5}, \\ v = -\dfrac{v_0}{5}. \end{cases}$$

Итак, третий шар после столкновения изменяет направление движения на противоположное.

Задача 3.17. Скатываясь под уклон $\alpha = 6°$, автомобиль массой $m = 10^3$ кг разгоняется при выключенной передаче до максимальной скорости $v = 72$ км/ч, после чего движение становится равномерным. Какую мощность развивает двигатель автомобиля при подъеме с такой же скоростью и по той же дороге вверх?

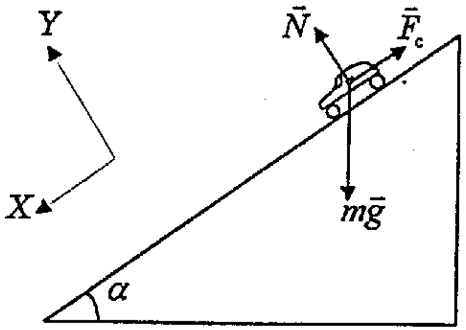


Рис. 3.20

Решение.

Условие равномерного движения автомобиля вниз (рис. 3.20) по оси X запишется в виде:

$mg\sin\alpha - F_c = 0$, где F_c – сила сопротивления движению автомобиля: $F_c = mg\sin\alpha$.

При равномерном движении автомобиля вверх (рис.3.21) получаем уравнение по оси X: $F - F_c - mg\sin\alpha = 0$, где F – сила тяги автомобиля, равная $F = F_c + mg\sin\alpha =$
$= mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = 2mg\sin\alpha$.

Мощность, которую при этом развивает двигатель автомобиля, находим по формуле (3.14):
$N = Fv = 2mgv\sin\alpha \approx 2mgv\alpha = 40$ кВт.

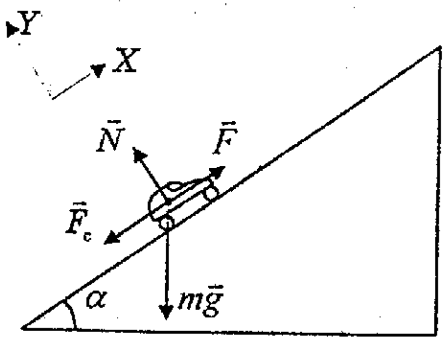


Рис. 3.21

Глава 4. Кинематика и динамика движения материальной точки по окружности

4.1. Криволинейное движение материальной точки

Материальная точка может двигаться не только по прямолинейной траектории, но и по криволинейной. Например, в главе 1 рассматривалось движение тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести земли. Было показано, что движение происходит по криволинейной траектории – параболе. Любое криволинейное движение обладает следующими свойствами:

1. Вектор мгновенной скорости в любой точке криволинейной траектории направлен по касательной.
2. Материальная точка при движении по криволинейной траектории обладает ускорением. Это связано с тем, что направление скорости изменяется. При криволинейном движении ускорение не равно нулю даже в случае, когда модуль скорости – постоянная величина.
3. В каждой точке криволинейной траектории движение происходит по дуге окружности, причем радиус окружности меняется от точки к точке.

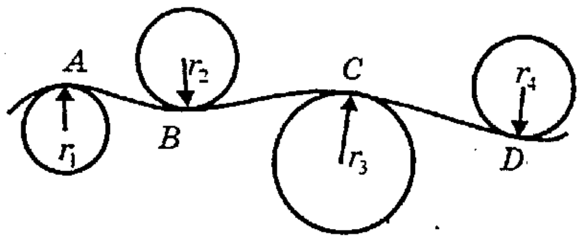


Рис. 4.1

На рис. 4.1 изображена криволинейная траектория, по которой движется материальная точка. В точках A, B, C, D движение происходит по дугам окружностей, радиусы которых r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно.

2. Кинематика равномерного движения по окружности

Наиболее простым криволинейным движением является **равномерное движение по окружности**. При равномерном движении по окружности точка за любые равные промежутки времени проходит равные дуги, т.е. модуль скорости υ является постоянной величиной. При движении по окружности скорость $\vec{\upsilon}$ называют **линейной скоростью**.

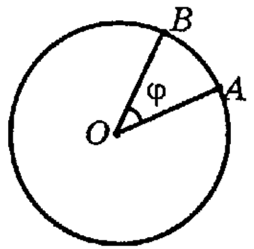


Рис. 4.2

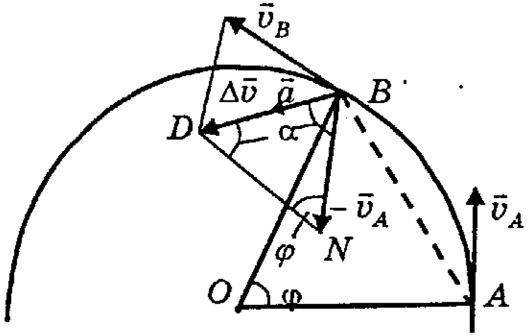
Положение материальной точки на окружности определяется углом φ между подвижным радиусом $R = OB$, проведенным к точке, и неподвижным радиусом OA (рис. 4.2). Скорость изменения угла поворота радиуса OB определяется **угловой скоростью**:

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}} \qquad (4.1)$$

где t – время поворота радиуса OB на угол φ. При равномерном движении по окружности $\omega = \text{const}$.

Время, за которое совершается один полный оборот, называется **периодом обращения** T. За один период T угол поворота радиуса $\varphi = 2\pi$, поэтому угловая скорость

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad (4.2)$$



За один период T точка проходит путь, равный длине окружности, поэтому модуль линейной скорости

$$\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)R.$$

Или $\boxed{\upsilon = \omega R}$ (4.3)

Частота обращения (вращения) ν – это число оборотов по окружности в единицу времени.

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (4.4)$$

Как и любое криволинейное движение, равномерное движение по окружности происходит с ускорением. Найдем его величину и направление (рис. 4.3).

Вектор изменения скорости

$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_B - \vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B + \left(-\vec{\upsilon}_A\right)$. Используя правило сложения векторов, построим вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ в точке B. Отметим, что $DN \perp OB$ и $BN \perp OA$, поэтому $\angle DNB = \angle BOA = \varphi$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. В $\triangle AOB$ $OB = OA = R$, а в $\triangle DBN$ $BN = DN = \upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon$, где υ – модуль линейной скорости $\Rightarrow$ $\triangle AOB \backsim \triangle BDN \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{OA}{BN} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{R}{\upsilon} = \frac{AB}{\Delta\upsilon} \Rightarrow \Delta\upsilon = \frac{\upsilon AB}{R}$. Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени $\Delta t \to 0$, тогда длина хорды AB стремится к длине дуги $AB = R\varphi$, где φ выражен в радианах. Модуль ускорения

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\upsilon AB}{R\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{AB}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{R\varphi}{\Delta t} =$$
$$= \upsilon\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varphi}{\Delta t} \Rightarrow a = \upsilon\omega.$$

Учитывая, что $\upsilon = \omega R$, получаем $a = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}$.

Ускорение направлено так же, как и вектор изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$. Выразим угол $\alpha = \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ и найдем его предел при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2},$$ так как при $\Delta t \to 0$ $\varphi \to 0$.

Итак, при равномерном движении по окружности материальная точка обладает ускорением, направленным по радиусу к

центру окружности. Это ускорение называют **нормальным или центростремительным**, его модуль можно вычислить по одной из трех формул:

$$\boxed{a_n = \upsilon\omega = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = (2\pi\nu)^2 R} \qquad (4.5)$$

4.3. Неравномерное движение по окружности

В общем случае при движении точки по окружности ее скорость может изменяться не только по направлению, но и по модулю. В этом случае говорят о **неравномерном движении по окружности.** Материальная точка, совершающая неравномерное движение по окружности, помимо центростремительного ускорения обладает ускорением $\vec{a}_\tau$, направленным по касательной к окружности. Оно называется **касательным или тангенциальным ускорением.** Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по модулю. На рис. 4.4 показаны центростремительное и тангенциальное ускорения в произвольной точке окружности.

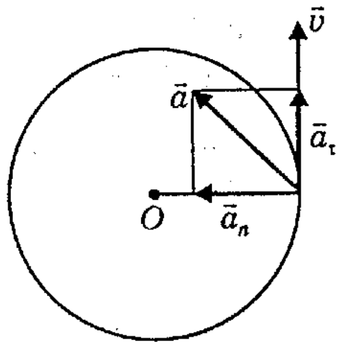


Рис. 4.4

При неравномерном движении полное ускорение

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n} \qquad (4.6)$$

Так как $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, то по теореме Пифагора модуль полного ускорения:

$$\boxed{a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}}} \qquad (4.7)$$

Как уже отмечалось, движение по произвольной криволинейной траектории можно рассматривать как движение по дугам окружностей различного радиуса. Отсюда следует, что в любой точке криволинейной траектории материальная точка обладает центростремительным и тангенциальным ускорениями.

Важным частным случаем криволинейного движения является качение обруча радиусом R, ось которого перемещается с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис.4.5).

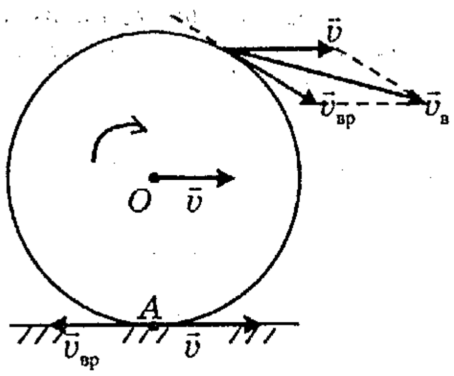


Рис. 4.5

При этом каждая точка обруча участвует в двух движениях: равномерном прямолинейном со скоростью $\vec{\upsilon}$ и вращательном относительно оси обруча со скоростью $\vec{\upsilon}_{вр}$. Траекторией точек обруча будет являться не окружность, а кривая, которая называется циклоидой.

Скорость произвольной точки B $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{вр}$, причем она направлена не по касательной к окружности, а по касательной к циклоиде.

Если обруч катится без проскальзывания, то точка A должна быть в покое относительно поверхности соприкосновения. Как и для любой другой точки $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{вр}$. Из рис. 4.5 видно, что модуль $\upsilon_A = \upsilon - \upsilon_{вр} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_{вр} = \upsilon} \qquad (4.8)$$

При движении без проскальзывания скорость вращательного движения равна скорости поступательного движения оси обруча.

Для нахождения модуля полного ускорения каждой точки обруча можно поступить следующим образом. Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с осью обруча и движущуюся со скоростью $\vec{\upsilon}$. В этой системе отсчета каждая точка обруча участвует только во вращательном движении вокруг оси обруча со скоростью $\vec{\upsilon}_{вр}$. Значит, у каждой точки будет только центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon_{вр}^2}{R} = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Во всех инерциальных системах отсчета полное ускорение точки одинаково (см. главу 1. «Кинематика»). Следовательно, и в системе отсчета, связанной с Землей, $a = a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

4.4. Динамика движения материальной точки по окружности

Причиной возникновения любого ускорения, в том числе центростремительного и тангенциального, являются силы, действующие на тело (материальную точку). В общем случае на тело, движущееся по окружности, действуют одна или несколько сил, равнодействующую которых обозначим через $\vec{F}$ (рис.4.6).

Сила $\vec{F}$ имеет проекцию F_x на направление X вдоль радиуса окружности к центру и F_y – на направление Y по касательной к окружности. По второму закону Ньютона центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{F_x}{m}$, где m – масса тела, а тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{F_y}{m}$. В случае, когда равнодействующая сил $\vec{F}$ направлена по радиусу окружности к центру, $F_x = F$, а $F_y = 0$, и, следовательно, тело обладает только центростремительным ускорением $\vec{a}_n$, его тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = 0$ (тело движется по окружности равномерно).

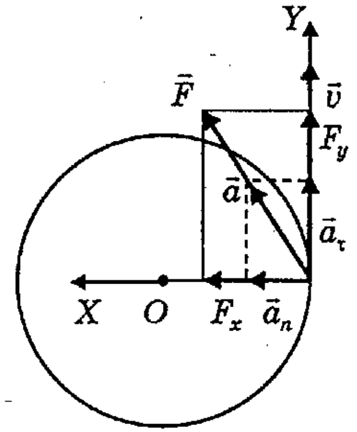


Рис. 4.6

Важно при этом понимать, что движение по окружности происходит при условии, что на тело действует сила, перпендикулярная направлению скорости. Это является отражением самого общего утверждения механики, согласно которому движение полностью определяется не только действующими на тело силами, но и теми координатами и скоростями, которые были у тела в начальный момент времени.

Физическая природа сил, обеспечивающих движение тела по окружности, может быть самой разнообразной. Но в любом случае это будут реальные силы природы, обусловленные взаимодействием тел. В механике, как правило, такими силами являются силы упругости, трения и гравитационные силы. В электродинамике это может быть кулоновская сила или сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд. В связи с этим необходимо четко понимать значение термина «центростремительная сила». Под центростремительной силой надо понимать не особую силу природы, а реальную силу, обусловленную взаимодействием тел и сообщающую телу центростремительное ускорение.

4.5. Примеры решения задач

Задача 4.1. Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью u под углом α к горизонту. Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Найти скорость поступательного движения оси катушки и ее угловую скорость вращения. Определить скорость и ускорение точки A. Радиус внутренней части катушки – r, внешней – R (рис. 4.7).

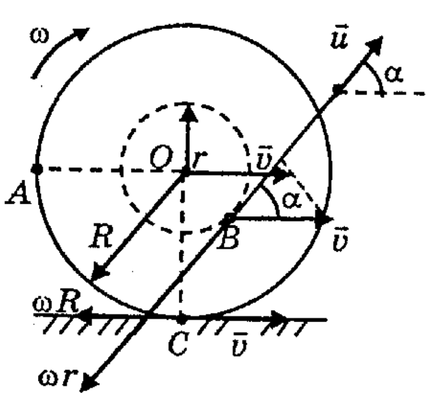


Рис. 4.7

Решение.

Любая точка катушки участвует в двух движениях: равномерном прямолинейном со скоростью $\vec{v}$ оси катушки и вращательном относительно оси катушки с угловой скоростью ω. Если нить расположена так, как показано на рис. 4.7, то катушка смещается вправо, вращаясь при этом по часовой стрелке. B – точка, в которой нить касается внутренней части катушки. Скорость поступательного движения точки B равна скорости оси обруча v, скорость вращательного движения точки B равна ωr. По условию задачи проекция полной скорости точки B на направление нити равна u, поэтому $v\cos\alpha - \omega r = u$. Скорость поступательного движения точки C равна v, вращательного –

ωR. Так как проскальзывания нет, то $v - \omega R = 0$. Получаем систему:

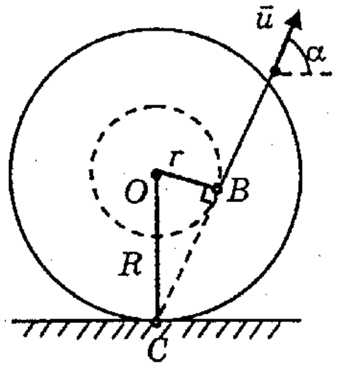


Рис. 4.8

$$\begin{cases} v\cos\alpha - \omega r = u, \\ v - \omega R = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \omega R, \\ \omega R\cos\alpha - \omega r = u, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{uR}{R\cos\alpha - r}, \\ \omega = \dfrac{u}{R\cos\alpha - r}. \end{cases}$$

Равенство $R\cos\alpha = r$ выполняется, когда продолжение нити проходит через точку C (рис. 4.8).

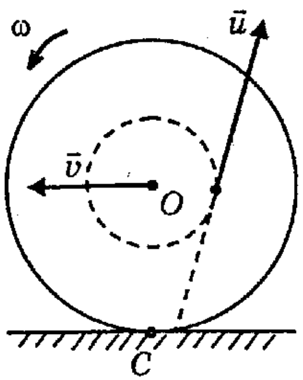


Рис. 4.9

В этом случае выражения для v и ω не определены, что соответствует вращению катушки на месте. При $R\cos\alpha < r$ (рис.4.9) ось катушки смещается влево, а катушка вращается против часовой стрелки.

Скорость поступательного движения точки A равна v, вращательного – $\omega R = v_{вр} = v$ (так как нет проскальзывания). Полная скорость есть векторная сумма этих скоростей, и, как следует из рис. 4.10, равна $v\sqrt{2} = \dfrac{uR\sqrt{2}}{R\cos\alpha - r}$.

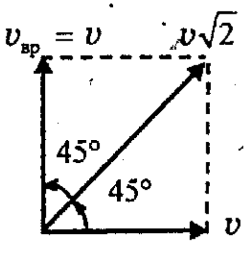


Рис. 4.10

Направлена эта скорость под углом 45^0 к горизонту.

Для вычисления ускорения точки A можно воспользоваться методикой вычисления ускорения точек обруча, тогда получим

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{u^2R}{(R\cos\alpha - r)^2}.$$

Задача 4.2. На горизонтальном диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, находится тело массой m. Расстояние тела от оси вращения равно R. Коэффициент трения тела о диск равен μ. Диск начинают медленно раскручивать вокруг вертикальной оси. Построить график зависимости силы трения, действующей на тело, от угловой скорости вращения ω.

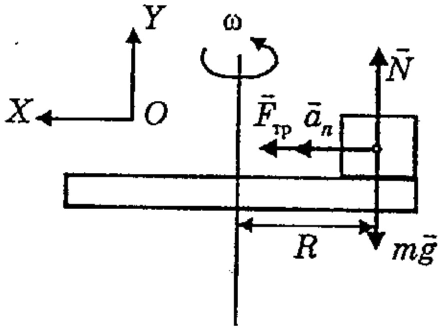


Рис. 4.11

Решение.

На тело действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны диска $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 4.11).

Пока тело покоится относительно диска, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения покоя. В системе отсчета, связанной с землей, тело движется по окружности радиусом R, и, следовательно, обладает центростремительным ускорением $\vec{a}_n$, направленным по радиусу к центру окружности. Введем систему координат XOY, ось Y направлена вертикально, а ось X – по радиусу окружности. Запишем второй закон Ньютона для проекций на оси Y и X:

$$\begin{matrix}\text{по оси } Y \\ \text{по оси } X\end{matrix} \begin{cases} N - mg = 0 \quad (1), \\ F_{тр} = ma_n \quad (2), \end{cases} \quad \text{где } a_n = \omega^2 R.$$

Как видно, в данном случае центростремительное ускорение сообщается телу силой трения покоя, ее и следовало бы назвать центростремительной силой.

Из уравнения (2) находим $F_{тр} = m\omega^2 R$ (3). Отсюда видно, что с ростом угловой скорости вращения ω должна возрастать сила трения покоя, сообщая телу центростремительное ускорение, необходимое для движения по окружности радиусом

R. Известно, что сила трения покоя – ограниченная величина, поэтому при определенных значениях угловой скорости тело не сможет удерживаться на окружности радиусом R и начнет скользить по диску. При этом на него будет действовать сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N = \mu mg$ (4). Формула (3) – это квадратичная зависимость $F_{тр}$ от ω, график этой зависимости – парабола. Формула (4) представляет собой зависимость вида $y = b = \mathrm{const}$, поэтому ее график – прямая. График зависимости $F_{тр}(\omega)$ представлен на рис. 4.12.

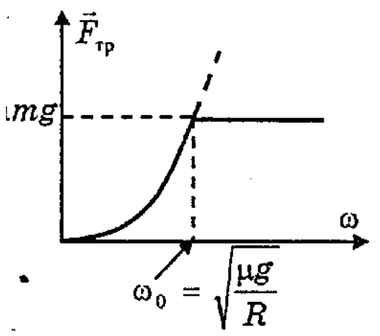


Рис. 4.12

Угловая скорость ω_0, при которой начинается скольжение, может быть найдена из условия, что сила трения покоя достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения.

$$F_{тр} = \mu mg \Rightarrow m\omega_0^2 R = \mu mg \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}.$$

Задача 4.3. Тело, подвешенное на нити длиной l, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса (конический маятник). Угловая скорость вращения равна ω. Определить угол, который образует нить с осью вращения (рис. 4.13).

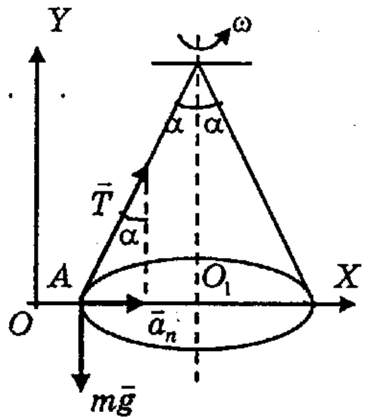


Рис. 4.13

Решение.

На тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости (натяжения) нити $\vec{T}$. Центростремительное ускорение $\vec{a}_n$ сообщается телу равнодействующей этих двух сил. По второму закону Ньютона, записанному для проекций на оси X и Y, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{по оси } Y \\ &\text{по оси } X \end{aligned} \begin{cases} T\cos\alpha - mg = 0, \\ T\sin\alpha = ma_n, \end{cases}$$

где $a_n = \omega^2 R = \omega^2 AO_1 = \omega^2 l\sin\alpha$.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} T\cos\alpha = mg, \\ T\sin\alpha = m\omega^2 l\sin\alpha. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 l\sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Напомним, что при $\alpha \in [0°, 90°]$ функция $\cos\alpha$ является убывающей. С увеличением угловой скорости вращения $\cos\alpha$ уменьшается, а угол отклонения нити от вертикали α возрастает.

Окончательно $\alpha = \arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 l}\right)$.

Задача 4.4. С самолета, летящего горизонтально со скоростью $v_0 = 720$ км/ч, отделяется тело. Найти центростремительное и тангенциальное ускорения тела, а также радиус кривизны траектории движения тела в точке, которую оно достигнет через 5с после начала движения (сопротивлением воздуха можно пренебречь) (рис. 4.14).

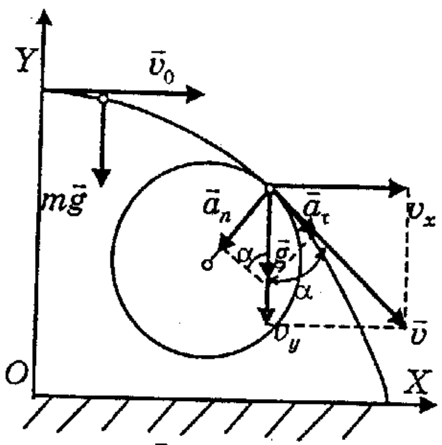


Рис. 4.14

Решение.

После отделения от самолета начальная скорость тела равна v_0. Движение происходит под действием только одной силы – силы тяжести $m\bar{g}$, которая сообщает телу полное ускорение $\bar{g}$. Траектория движения тела – парабола. Проекции полного ускорения $\bar{g}$ на горизонтальную и вертикальную оси X и Y: $a_x = 0$ и $a_y = -g$, поэтому скорость по оси X $\upsilon_x(t) = \upsilon_0$, а скорость по оси Y $\upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t = -gt$. Через $t = 5$ с полная скорость тела $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2}$. Разложим вектор полного ускорения тела $\bar{g}$ на направление, перпендикулярное скорости $\vec{\upsilon}$, и направление, совпадающее с направлением скорости. Получим соответственно центростремительное $\bar{a}_n$ и тангенциальное $\bar{a}_\tau$ ускорения, причем $\bar{a}_n + \bar{a}_\tau = \bar{g}$ и $\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau$. Тогда $a_n = g\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon}$.

Итак, $a_n = g\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon} = g\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2}} = 9{,}5$ м/с².

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = 2{,}4$ м/с².

Так как центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, то

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_0^2 + (gt)^2}{\left(g\dfrac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2}}\right)} = \frac{\left(\upsilon_0^2 + (gt)^2\right)^{3/2}}{g\upsilon_0} = 4455 \text{ м}.$$

Задача 4.5. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения велосипедиста по наклонному треку с углом наклона α по сравнению с максимальной скоростью движения по горизонтальному треку при одинаковых радиусах закругления и коэффициентах трения μ?

Решение.

Рассмотрим движение велосипедиста по горизонтальному треку (рис. 4.15). На велосипедиста действуют: сила тяжести $m\bar{g}$

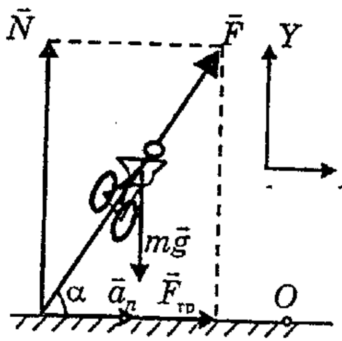


Рис. 4.15

и нормальная составляющая силы реакции опоры $\bar{N}$. Центростремительное ускорение велосипедисту может сообщить здесь только сила трения покоя, направленная по радиусу окружности к ее центру O и возникающая в том случае, когда велосипедист наклоняется к центру окружности. Равнодействующая сил $\bar{N}$ и $\bar{F}_{тр}$ $\Rightarrow$ $\bar{F} = \bar{F}_{тр} + \bar{N}$ проходит через центр тяжести велосипедиста, ибо в противном случае существовал бы опрокидывающий момент сил. По второму закону Ньютона для проекции на радиальное направление X $F_{тр} = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$, где υ – скорость движения велосипедиста. Так как сила трения покоя $F_{тр} \le \mu N = \mu mg$, то получаем неравенство $m\dfrac{\upsilon^2}{R} \le \mu mg \Rightarrow$ $\Rightarrow \upsilon^2 \le \mu gR \Rightarrow \upsilon \le \sqrt{\mu gR} \Rightarrow$ максимальное значение скорости на горизонтальном треке $\upsilon_1 = \sqrt{\mu gR}$.

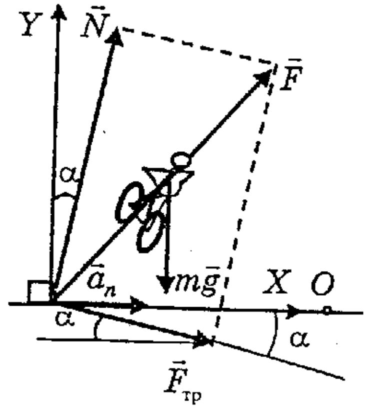


Рис. 4.16

Рассмотрим движение велосипедиста по наклонному треку. Действующие на него силы изображены на рис. 4.16 ($\bar{F}$ – равнодействующая сил реакции опоры $\bar{N}$ и силы трения покоя $\bar{F}_{тр}$).

По второму закону Ньютона для проекций на оси X и Y:

$$\begin{cases} \text{по оси } Y & N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha - mg = 0 \quad (1), \\ \text{по оси } X & N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = ma_n \quad (2), \end{cases} \quad \text{где } a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

(υ – скорость движения по наклонному треку). Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha = mg \quad (1'), \\ N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = m\dfrac{\upsilon^2}{R} \quad (2'). \end{cases}$$

Выразим из этой системы N и $F_{тр}$. Для этого умножим уравнение $(1')$ на $\cos\alpha$, а уравнение $(2')$ – на $\sin\alpha$.

$$\begin{cases} N\cos^2\alpha - F_{тр}\sin\alpha\cos\alpha = mg\cos\alpha, \\ N\sin^2\alpha + F_{тр}\cos\alpha\sin\alpha = m\dfrac{\upsilon^2}{R}\sin\alpha. \end{cases}$$

После сложения получим $N(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$

$$= mg\cos\alpha + m\frac{\upsilon^2}{R}\sin\alpha \Rightarrow N = m\left(g\cos\alpha + \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

Умножим $(1')$ на $\sin\alpha$, а $(2')$ – на $\cos\alpha$, тогда

$$\begin{cases} N\sin\alpha\cos\alpha - F_{тр}\sin^2\alpha = mg\sin\alpha, \\ N\sin\alpha\cos\alpha + F_{тр}\cos^2\alpha = m\dfrac{\upsilon^2}{R}\cos\alpha. \end{cases}$$

После вычитания найдем $F_{тр} = \left(\dfrac{\upsilon^2}{R}\cos\alpha - g\sin\alpha\right)$. Так как $F_{тр}$ – сила трения покоя, то $F_{тр} \le \mu N \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\left(\frac{\upsilon^2}{R}\cos\alpha - g\sin\alpha\right) \le \mu m\left(g\cos\alpha + \frac{\upsilon^2}{R}\sin\alpha\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\upsilon^2}{R}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \le g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$. Разделим обе части на $\cos\alpha$ (из условия $\cos\alpha > 0$).

$$\frac{\upsilon^2}{R}(1 - \mu\mathrm{tg}\alpha) \le g(\mu + \mathrm{tg}\alpha).$$

Если $(1 - \mu\mathrm{tg}\alpha) > 0$, то $\upsilon^2 \le \dfrac{gR(\mu + \mathrm{tg}\alpha)}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}$, или $\upsilon \le \sqrt{\dfrac{gR(\mu + \mathrm{tg}\alpha)}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}}$. Значит, максимальная скорость при движении по наклонному треку $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{gR(\mu + \mathrm{tg}\alpha)}{1 - \mu\mathrm{tg}\alpha}}$.

Отношение $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \sqrt{\dfrac{\mu + \mathrm{tg}\alpha}{\mu(1 - \mu\mathrm{tg}\alpha)}}$.

Задача 4.6. Определить скорость, которой должно обладать тело, чтобы равномерно двигаться по круговой орбите вокруг Земли. Считать, что расстояние от тела до поверхности Земли $h << R_з$, где $R_з$ =6400км – радиус Земли (рис. 4.17).

Решение.

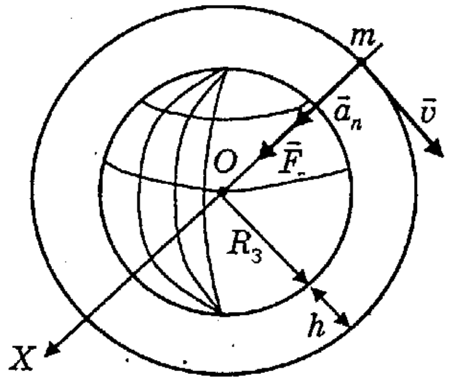


Рис. 4.17

Скорость, о которой идет речь в условии задачи, называется **первой космической**. Единственная сила, действующая на тело, – это сила притяжения к Земле $F_г = G\dfrac{M_з m}{(R_з + h)^2}$. Сопротивление воздуха не учитываем. Здесь $M_з$ – масса Земли, а m – масса тела, G – гравитационная постоянная. Эта сила сообщает телу центростремительное ускорение $\vec{a}_n$. По второму закону Ньютона для проекции на ось X $F_г = ma_n$, где $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R_з + h}$. После подстановки получаем

$$G\frac{M_з m}{(R_з+h)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_з+h}.$$ С учетом того, что $R_з >> h, R_з + h \approx R_з$, уравнение запишется в виде $G\frac{M_з}{R_з^2} = \frac{\upsilon^2}{R_з} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з}}$. Учитывая, что $G\frac{M_з}{R_з^2} = g$, получаем формулу для первой космической скорости

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з}} = \sqrt{gR_з}} \qquad (4.9)$$

Эту формулу можно использовать для вычисления первой космической скорости и для других планет, подставляя параметры этих планет.

Задача 4.7. Какой должна быть продолжительность суток на Земле, чтобы тела на экваторе были невесомы. Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

Решение.

Рассмотрим тело массой m. На тело действуют силы: $\vec{F}_г$ – сила притяжения к Земле и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 4.18). По третьему закону Ньютона вес по модулю равен N. Тело обладает центростремительным ускорением $\vec{a}_n$. По второму закону Ньютона

$$F_г - N = ma_n \qquad (1).$$

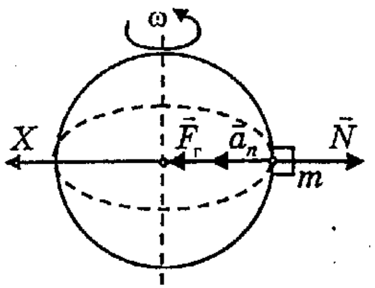


Рис. 4.18

Так как $F_г = G\frac{mM_з}{R_з^2}$ и $a_n = \omega^2 R_з$, уравнение (1) перепишем в виде:

$$G\frac{mM_з}{R_з^2} - N = m\omega^2 R_з \Rightarrow N = P = G\frac{mM_з}{R_з^2} - m\omega^2 R_з.$$

Из этого уравнения следует, что вес на экваторе уменьшается из-за вращения Земли. В нашем случае $P = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow G\frac{mM_з}{R_з^2} - m\omega^2 R_з = 0 \Rightarrow \omega^2 R_з = G\frac{M_з}{R_з^2}.$$ Известно, что $G\frac{M_з}{R_з^2} = g$, поэтому $\omega^2 R_з = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R_з}}$.

Период вращения (сутки): $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_з}{g}} \approx 1{,}3$ч.

Задача 4.8. Две звезды движутся вокруг общего центра масс с постоянными по модулю скоростями υ_1 и υ_2 и периодом T. Найти массу звезд и расстояние между ними (рис.4.19).

Решение.

Положение центра масс двух тел массой m_1 и m_2, расположенных на расстоянии L, можно определить, используя формулу 3.5 Главы 3. Тогда

$$l_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2},$$ а $$l_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}.$$ Когда речь идет о вращении планеты вокруг звезды, то масса звезды много больше массы планеты $m_1 >> m_2 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \to 0$. Поэтому

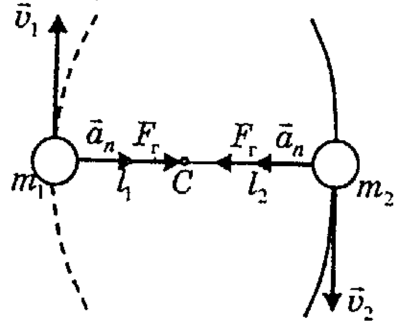


Рис. 4.19

$$l_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1}L}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \to 0,$$ т.е. центр масс такой системы совпадает со звездой, и вращение планеты происходит вокруг звезды. В нашей задаче массы звезд сравнимы, поэтому вращение происходит вокруг точки C, удаленной от звезд на расстояния l_1 и l_2. Итак, звезда массой m_1 движется по окружности радиусом l_1 с центром в точке C. За период T звезда совершает полный обо-

рот, проходя путь, равный длине окружности $2\pi l_1$. Модуль ее скорости $\upsilon_1 = \dfrac{2\pi l_1}{T} \Rightarrow l_1 = \dfrac{\upsilon_1 T}{2\pi}$. Аналогично находим радиус окружности, по которой движется звезда массой m_2: $l_2 = \dfrac{\upsilon_2 T}{2\pi}$. Расстояние между звездами

$$L = l_1 + l_2 = \frac{T}{2\pi}(\upsilon_1 + \upsilon_2).$$

На звезду массой m_1 действует гравитационная сила $F_г = G\dfrac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon_1^2}{l_1}$ (рис.4.19). По второму закону Ньютона

$$F_г = m_1 a_n \Rightarrow G\frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{l_1} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \upsilon_1^2\frac{L^2}{l_1 G} = \frac{\upsilon_1 T}{2\pi G}(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2.$$

На звезду массой m_2 действует такая же по модулю гравитационная сила $G\dfrac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $\dfrac{\upsilon_2^2}{l_2}$. Получаем уравнение:

$$G\frac{m_1 m_2}{L^2} = m_2\frac{\upsilon_2^2}{l_2} \Leftrightarrow m_1 = \upsilon_1^2\frac{L^2}{l_2 G} = \frac{\upsilon_2 T}{2\pi G}(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2.$$

Задача 4.9. Гладкий горизонтальный стержень AB может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. На стержне находится небольшое тело массой m, соединенное невесомой пружиной длиной l_0 с концом A. Коэффициент жесткости пружины равен k. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω? (рис. 4.20).

Решение.

Пусть стержень и тело вращаются с угловой скоростью ω.

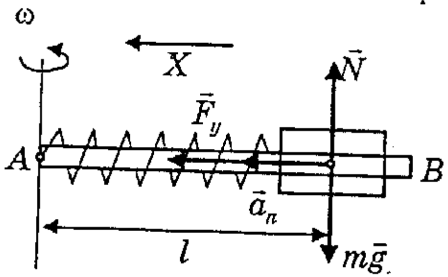


Рис. 4.20

Пружина в этом случае оказывается деформированной (растянутой), и ее длина $l > l_0$. На тело действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны стержня $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_у$ (ее модуль по закону Гука $F_у = k(l - l_0)$). Направим ось X, как показано на рис. 4.20. По второму закону Ньютона $F_у = ma_n$, где $a_n = \omega^2 l$ – центростремительное ускорение тела. Из уравнения $k(l - l_0) = m\omega^2 l$ находим длину растянутой пружины: $l = \dfrac{kl_0}{k - m\omega^2}$.

Вращающееся тело обладает механической энергией $W = W_у + W_к$, где $W_к$ – его кинетическая энергия, а $W_у$ – потенциальная энергия упругой деформации.

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m(\omega l)^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{kl_0}{k - m\omega^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{m\omega^2 l_0^2}{2}\left(\frac{k}{k - m\omega^2}\right)^2.$$

$$W_у = \frac{k(l - l_0)^2}{2} = \frac{k}{2}\left(\frac{kl_0}{k - m\omega^2} - l_0\right)^2 =$$

$$= \frac{kl_0^2}{2}\left(\frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}\right)^2.$$

Механическая энергия тела $W = W_у + W_к =$

$$= \frac{m\omega^2 l_0^2}{2}\left(\frac{k}{k - m\omega^2}\right)^2 + \frac{k l_0^2}{2}\left(\frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{m\omega^2 l_0^2}{2}\cdot\frac{k^2 + km\omega^2}{\left(k - m\omega^2\right)^2} = \frac{m\omega^2 l_0^2}{2}\cdot\left(\frac{1 + m\omega^2/k}{\left(1 - m\omega^2/k\right)^2}\right).$$

Эту энергию тело приобретает за счет работы внешних сил.

Искомая работа $A = W = \dfrac{m\omega^2 l_0^2}{2}\cdot\left(\dfrac{1 + m\omega^2/k}{\left(1 - m\omega^2/k\right)^2}\right)$.

Задача 4.10. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти разность сил натяжения нити в нижней и верхней точках траектории (рис.4.21).

Решение.

В нижней точке окружности (точка A) к грузу приложены силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_A$, которые сообщают ему центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon_A^2}{R}$, где υ_A – скорость груза в точке A, R – длина нити. По второму закону Ньютона

$$T_A - mg = m\frac{\upsilon_A^2}{R} \Rightarrow$$

$$T_A = mg + m\frac{\upsilon_A^2}{R}.$$

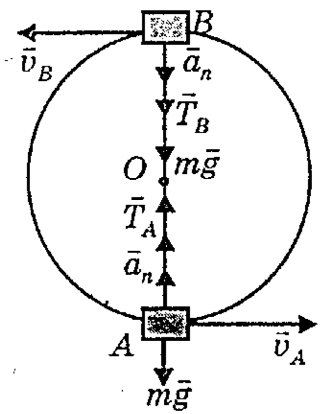


Рис. 4.21

В точке B к грузу приложены силы: сила натяжения нити $\vec{T}_B$ и сила тяжести $m\vec{g}$, сообщающие грузу центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon_B^2}{R}$. По второму закону Ньютона

$$T_B + mg = m\frac{\upsilon_B^2}{R} \Rightarrow T_B = m\frac{\upsilon_B^2}{R} - mg.$$

Поэтому

$$T_A - T_B = 2mg + \frac{m\upsilon_A^2}{R} - \frac{m\upsilon_B^2}{R} = 2mg + \frac{m}{R}\left(\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2\right) \quad (1).$$

В точке A механическая энергия груза равна его кинетической энергии: $W_A = m\dfrac{\upsilon_A^2}{2}$. В точке B механическая энергия есть сумма потенциальной и кинетической энергий: $W_B = mg\cdot 2R + m\dfrac{\upsilon_B^2}{2}$. В процессе движения на груз действуют: консервативная сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Ее модуль изменяется от точки к точке, но на любом бесконечно малом перемещении вектор силы натяжения перпендикулярен вектору перемещения. Работа силы натяжения нити при перемещении по любой дуге окружности равна нулю. Следовательно, механическая энергия груза сохраняется: $W_A = W_B \Rightarrow$

$$m\frac{\upsilon_A^2}{2} = 2mgR + m\frac{\upsilon_B^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\upsilon_A^2}{2} - m\frac{\upsilon_B^2}{2} = 2mgR \Leftrightarrow \upsilon_A^2 - \upsilon_B^2 = 4gR.$$

Подставив в (1), найдем, что

$$T_A - T_B = 2mg + \frac{m}{R}\left(\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2\right) = 2mg + \frac{m}{R}(4gR) = 6mg.$$

Задача 4.11. На горизонтальной поверхности находится гладкая полусфера радиусом R. С верхней ее точки без начальной скорости соскальзывает тело. Определить время движения тела после отрыва от полусферы (рис. 4.22).

Решение.

Во время скольжения тела по полусфере на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$, направленная вдоль

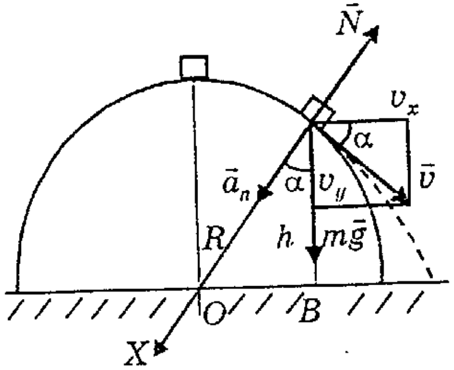


Рис. 4.22

продолжения радиуса. Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, направленное к центру полусферы (v – скорость в какой-либо точке полусферы). Спроецировав силы на ось X, по второму закону Ньютона получаем

$$mg\cos\alpha - N = m\left(\frac{v^2}{R}\right) \Rightarrow N = mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{R} \ (1).$$

Так как скорость тела возрастает, то в некоторой точке $\bar{N}$ обратится в ноль, т.е. тело оторвется от поверхности полусферы.

Пусть высота, на которой происходит отрыв, равна h. Механическая энергия тела в верхней точке движения $W_1 = mgR$.

Механическая энергия в точке отрыва $W_2 = mgh + \dfrac{mv^2}{2}$. Так как трения нет, то $W_1 = W_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mgR = mgh + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2g(R-h) \ (2).$$

В ΔOAB $OA = R$, а $AB = h$, поэтому.

$\cos\alpha = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{h}{R}$ (3). Подставив значения v^2 и $\cos\alpha$ из уравнений (2) и (3) в уравнение (1), получим:

$$0 = mg\frac{h}{R} - m\frac{2g(R-h)}{R} \quad (\text{в точке отрыва } N = 0)$$

$$\Rightarrow 2(R-h) = h \Rightarrow h = \frac{2}{3}R.$$

В момент отрыва скорость тела $v = \sqrt{2g(R-h)} =$

$$= \sqrt{2g\frac{1}{3}R} = \sqrt{\frac{2}{3}gR};$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{3}, \ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

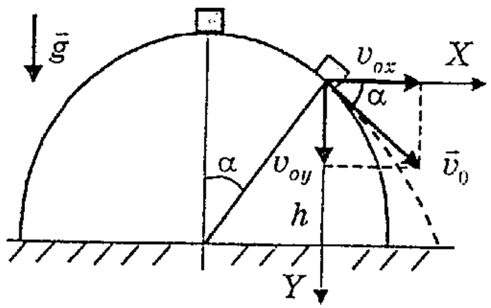


Рис. 4.23

После отрыва от полусферы движение происходит только под действием силы тяжести, причем скорость тела $\bar{v} = \bar{v}_0$ сначала направлена под углом α к горизонту (рис. 4.23). Значит, тело движется по параболе.

Начальные координаты тела:

$x_0 = 0, y_0 = 0$. Начальные скорости: $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$ Закон движения по оси Y:

$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} = v_0\sin\alpha \cdot t + \dfrac{gt^2}{2}$. В момент падения $y(t_п) = h \Rightarrow v_0\sin\alpha \cdot t_п + \dfrac{gt_п^2}{2} = h$, где $t_п$ – искомое время. Получаем квадратное уравнение:

$gt_п^2 + 2v_0\sin\alpha \cdot t_п - 2h = 0$ корни которого:

$t_п = \dfrac{-v_0\sin\alpha \pm \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}$. Берем положительный корень: $t_п = \dfrac{-v_0\sin\alpha + \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} =$

$$= \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{(\upsilon_0\sin\alpha)^2}}-1\right) \approx 0{,}7\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Задача 4.12. Тележка массой m совершает мертвую петлю, скатываясь с минимально необходимой для этого высоты (рис.4.24). С какой силой тележка давит на рельсы в точке A, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью? Трением пренебречь.

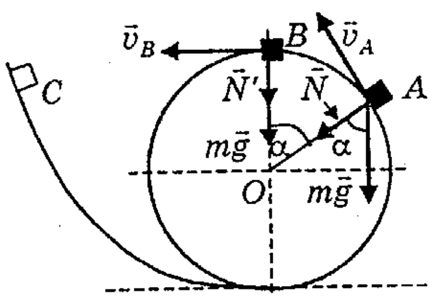


Рис. 4.24

Решение.

Прежде всего выясним, какова минимальная высота, необходимая для совершения тележкой мертвой петли. Для этого должны выполняться следующие условия:

1.Тележка должна оказаться в точке B. Механическая энергия в начальной точке движения $W_C = mgH$. В точке B механическая энергия $W_B = mg \cdot 2R + \frac{m\upsilon_B^2}{2}$. Так как трения нет, то $W_C = W_B$ или $mgH = mg \cdot 2R + \frac{m\upsilon_B^2}{2}$ (1).

2.В точке B тележка должна обладать центростремительным ускорением, необходимым для движения по окружности радиусом R. В точке B на тележку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}'$, которые сообщают тележке центростремительное ускорение a_n. По второму закону Ньютона

$mg + N' = ma_n = m\frac{\upsilon_B^2}{R}$ (2).

3.Как видно из уравнений (1) и (2), минимум высоты соответствует $N' = 0$.

Из уравнения (2) $m\upsilon_B^2 = mgR$. После подстановки в (1) получим: $mgH = 2mgR + \frac{mgR}{2} \Rightarrow H = \frac{5R}{2}$.

Из рис. 4.24 следует, что точка A находится на высоте $R + R\cos\alpha = R(1+\cos\alpha)$. Механическая энергия тележки в точке A: $W_A = mgR(1+\cos\alpha) + \frac{m\upsilon_A^2}{2}$, а в точке C: $W_C = mgH = mg \cdot \frac{5}{2}R$. Так как $W_C = W_A$, то

$$mg \cdot \frac{5}{2}R = mgR(1+\cos\alpha) + \frac{m\upsilon_A^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_A^2 = gR(3 - 2\cos\alpha) \quad (3).$$

В точке A на тележку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная по радиусу к центру. Эти силы сообщают тележке центростремительное ускорение a_n. Спроецировав силы на ось, направленную по радиусу к центру, получаем: $mg\cos\alpha + N = ma_n = m\frac{\upsilon_A^2}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = m\frac{\upsilon_A^2}{R} - mg\cos\alpha = \frac{mgR(3-2\cos\alpha)}{R} - mg\cos\alpha =$$

$= 3mg(1-\cos\alpha) = 6mg\sin^2\frac{\alpha}{2}$. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой тележка давит на рельсы.

Задача 4.13. Спуск с горы представляет собой дугу AB окружности радиусом $R = 10$ м с плавным выездом на горизонтальную поверхность BC. Поверхность горы гладкая, а горизонтальная поверхность шероховатая с коэффициентом трения $\mu = 0{,}15$. На каком расстоянии от конца горы остановятся санки, если в точке A их полное ускорение равно по модулю g. Радиус, проведенный в точку A, образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$ (рис. 4.25).

Решение.

В точке A на санки действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. В направлении X (по радиусу к центру) эти силы сообщают санкам центростремительное ускорение $\vec{a}_n$ $\left(a_n = \dfrac{v_A^2}{R}\right)$. В направлении Y (по касательной к окружности) эти силы сообщают тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, причем $mg\sin\alpha = ma_\tau \Rightarrow a_\tau = g\sin\alpha$.

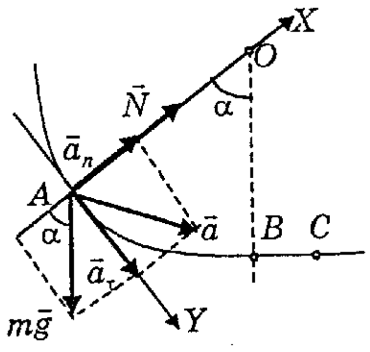


Рис. 4.25

Так как модуль полного ускорения $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2\sin^2\alpha} = g\sqrt{1-\sin^2\alpha} = g\cos\alpha.$$

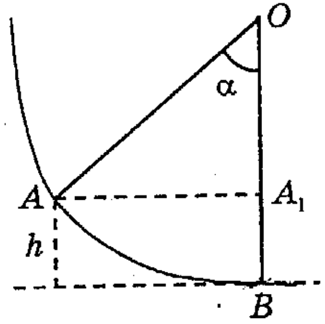


Рис. 4.26

Из равенства $\dfrac{v_A^2}{R} = g\cos\alpha$ находим квадрат скорости в точке A: $v_A^2 = Rg\cos\alpha$.

В точке A механическая энергия равна сумме кинетической $W_{кA} = \dfrac{mv_A^2}{2}$ и потенциальной $W_{pA} = mgh$ (рис.4.26).

Определяем высоту h:

$$h = A_1B = OB - OA_1 = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha).$$

Итак, механическая энергия з точке A:

$$W_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha) = \frac{mRg\cos\alpha}{2} + mgR(1-\cos\alpha) =$$

$$= mgR\left(\frac{\cos\alpha}{2} + 1 - \cos\alpha\right) = mgR\left(1 - \frac{\cos\alpha}{2}\right).$$

В момент остановки конечная механическая энергия $W_к = 0$. Изменение механической энергии равно работе сил трения на горизонтальном участке BC: $\Delta W = A_{тр}$, где $A_{тр} = -\mu mgx$ (x – расстояние, пройденное санками). Получаем уравнение: $-mgR\left(1 - \dfrac{\cos\alpha}{2}\right) = -\mu mgx \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{\mu}\left(1 - \frac{\cos\alpha}{2}\right) = \frac{3R}{4\mu} = 50 \text{ м}.$$

Задача 4.14. Определить кинетическую энергию обруча массой m, катящегося без проскальзывания со скоростью v.

Решение.

Каждая точка обруча совершает сложное движение, состоящее из поступательного движения со скоростью v и вращательного движения со скоростью $v_{вр} = 0$ (движение без проскальзывания). Выберем материальную точку на обруче массой m_i. Кинетическая энергия этой точки будет складываться из кинетической энергии поступательного движения $\dfrac{m_i v^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения $\dfrac{m_i v_{вр}^2}{2} = \dfrac{m_i v^2}{2}$. Итак, кинетическая энергия каждой точки обруча $W_{кi} = m_i v^2$. Просуммировав кинетическую энергию всех точек обруча, получим его кинетическую энергию:

$$W_к = \sum W_{кi} = \left(\sum m_i\right)v^2 = mv^2.$$

Задача 4.15. По сторонам прямого угла скользит жесткая спица длиной $2l$, посередине которой закреплена бусинка массой m. Скорость точки B постоянна и равна v. Определить, с какой силой действует бусинка на спицу в тот момент, когда угол $\alpha = 45°$ (рис. 4.27).

Решение.

В любой момент времени $\triangle AOB$ – прямоугольный. OC – медиана, проведенная к гипотенузе и равная половине гипотенузы, т.е. $OC = AB/2 = l$. Таким образом, какое бы положение ни занимал стержень в процессе движения, бусинка находится все время на одном и том же расстоянии от точки O, т.е. она движется по окружности радиусом l. Мгновенная скорость бусинки $\bar{v}_c$ направлена по касательной к окружности и имеет проекции на оси X и Y. Пусть x_0 – начальная координата точки B, тогда начальная координата точки C по оси X равна $\dfrac{x_0}{2}$. Координата точки B изменяется по закону $x = x_0 + vt$, а координата точки C всегда равна $\dfrac{x}{2} = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{v}{2}t$. Следовательно, точка C (бусинка) в направлении X движется равномерно со скоростью $v_x = \dfrac{1}{2}v$.

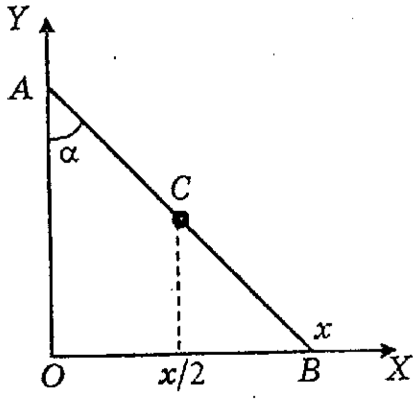


Рис. 4.27

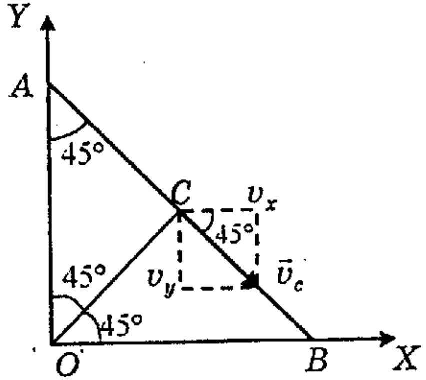


Рис. 4.28

В тот момент, когда $\alpha = 45°$ $\angle OCA = \angle OCB = 90°$, т.е. стержень занимает положение, касательное к окружности, по которой движется бусинка.

В этот момент скорость $\bar{v}_c$ направлена вдоль стержня AB, а $v_x = |v_y| = \dfrac{1}{2}v$ (рис. 4.28). Скорость $v_c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$.

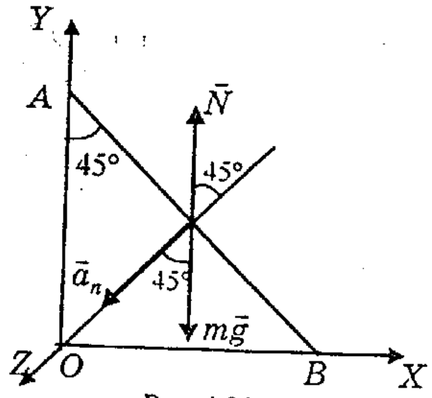


Рис. 4.29

В рассматриваемой точке на бусинку действуют: сила тяжести $m\bar{g}$ и сила реакции со стороны стержня $\bar{N}$. Так как в направлении X ускорение бусинки равно 0, то сила $\bar{N}$ направлена вертикально (причем так будет во всех точках траектории) (рис. 4.29). По второму закону Ньютона для оси Z, направленной по радиусу, получаем

$mg\cos 45° - N\cos 45° = ma_n$, где a_n – центростремительное ускорение, равное $\dfrac{v_c^2}{l} = \dfrac{v^2}{2l}$. После подстановки получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(mg - N) = \frac{mv^2}{2l} \Rightarrow N = m\left(g - \frac{v^2}{l\sqrt{2}}\right)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона с такой же по модулю силой бусинка действует на спицу.

Глава 5. Статика. Гидростатика. Элементы гидродинамики

5.1. Основные понятия статики

Статика – это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тел. В статике, изучаемой в школе, рассматривается система плоских сил, т.е. таких сил, векторы которых посредством параллельного переноса могут быть перемещены в одну плоскость. Во многих задачах статики в отличие от динамики важно знать точки приложения сил.

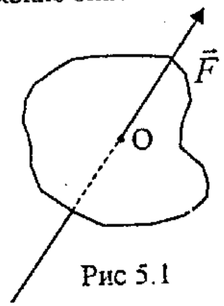


Рис 5.1

Плечо силы есть кратчайшее расстояние от оси вращения (точки вращения) до линии действия силы. Чтобы найти плечо силы, надо из точки вращения опустить перпендикуляр на линию действия силы, а затем измерить его длину.

Момент силы относительно некоторой оси вращения – это произведение модуля силы на ее плечо h:

$$\boxed{M = \pm Fh}. \qquad (5.1)$$

Момент силы считается положительным, если сила вращает тело по часовой стрелке, и отрицательным, если сила вращает тело против часовой стрелки. Момент ненулевой силы равен нулю, если ее плечо $h = 0$. Как видно из рис. 5.1 это будет в том случае, когда прямая, вдоль которой действует вектор силы, проходит через ось вращения.

5.2. Условия равновесия тел

Если тело находится в равновесии, то выполняется два условия равновесия:

1. Векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0} \qquad (5.2)$$

Условие (5.2) равносильно тому, что сумма проекций всех сил на любое направление равна нулю. Если выбрать произвольную ось X, то получим

$$\boxed{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + ... + F_{nx} = 0} \qquad (5.3)$$

где F_{ix} – проекции сил, приложенных к телу на произвольную ось X.

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно любой точки, равна нулю.

$$\boxed{M_1 + M_2 + ... + M_n = 0} \qquad (5.4)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда тело находится под действием трех попарно непараллельных сил. Тогда можно утверждать, что прямые, вдоль которых направлены векторы этих сил, пересекаются в одной точке. Две непараллельные прямые обязательно пересекутся в какой-либо точке A. Если третья прямая не проходит через эту точку, то третья сила будет иметь ненулевой момент относительно точки A, в то время как моменты двух других сил равны нулю. Значит, суммарный момент сил относительно точки A будет отличен от нуля, и, следовательно, тело не будет находиться в равновесии. Это противоречит условию задачи. Разумеется, аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда к телу приложено более трех попарно непараллельных сил.

5.3. Центр масс. Центр тяжести тела

Во многих задачах статики требуется определить положение центра масс или центра тяжести тела.

Центром масс тела называют точку пересечения прямых, вдоль которых должны быть направлены силы так, чтобы тело под действием этих сил двигалось поступательно.

Частным случаем поступательного движения является движение под действием силы тяжести (при условии, что телу не было предварительно сообщено вращательное движение). Так как сила тяжести действует на все точки тела, а тело при этом движется поступательно, то можно утверждать, что равнодействующая всех этих сил при любом положении тела проходит через центр масс. Центр масс тела, когда оно находится в поле тяжести, называют **центром тяжести тела**.

Центр тяжести однородного тела совпадает с его геометрическим центром, например, центр тяжести однородного стержня находится в середине стержня, центр тяжести однородного шара – в центре шара, центр тяжести однородного плоского параллелограмма (и, в частности, прямоугольника) – в точке пересечения его диагоналей.

Для того, чтобы определить положение центра тяжести однородного плоского треугольника, надо разбить его на очень тонкие полоски прямыми, параллельными одной из сторон треугольника, как показано на рис. 5.2.

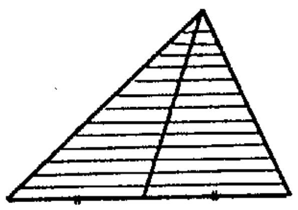


Рис. 5.2

Каждую полоску можно рассматривать как прямоугольник, центр тяжести которого находится на прямой, проходящей через середины его сторон. Отсюда следует, что центр тяжести всего треугольника должен находиться на его медиане. Проделав аналогичную процедуру для другой стороны треугольника, мы убеждаемся, что центр его тяжести должен располагаться на медиане, проведенной к другой его стороне. Отсюда вывод – центр тяжести однородного плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.

5.4. Виды равновесия тел

В статике рассматривают следующие виды равновесия тел: **устойчивое, неустойчивое и безразличное.**

Равновесие тела устойчиво, если при малом отклонении от равновесного положения равнодействующая сил, приложенных к телу, возвращает его в положение равновесия.

Равновесие неустойчиво, если при малом отклонении от положения равновесия равнодействующая сил, приложенных к телу, удаляет его от этого положения.

Если при небольших смещениях тела из первоначального положения равнодействующая приложенных к телу сил остается равной нулю, то тело находится в состоянии **безразличного равновесия.**

Существует ряд достаточных признаков устойчивого равновесия тел, имеющих **ось вращения и площадь опоры.**

Тело, имеющее ось вращения, будет находиться в устойчивом равновесии, если его центр тяжести расположен ниже оси вращения на вертикальной прямой, проходящей через ось вращения. Если же центр тяжести находится выше оси вращения, то равновесие неустойчиво.

Тело, имеющее площадь опоры, будет находиться в устойчивом равновесии, если вертикаль, проведенная через центр тяжести, пересекает площадь опоры. Если же эта вертикаль не пересекает площадь опоры, то равновесие тела неустойчиво.

В общем случае устойчивому равновесию соответствует **минимум потенциальной энергии тела** по отношению к ее значениям в соседних положениях.

5.5. Свойства жидкостей

В этом разделе речь пойдет о жидкостях и о тех специфических законах, которым подчиняется жидкость, находящаяся в равновесии. Этот раздел механики жидкостей и газов называют **гидростатикой**. Жидкости в отличие от твердых тел легко изменяют свою форму и принимают форму того сосуда, в котором они находятся. Это связано с **текучестью жидкостей**: способностью слоев жидкостей перемещаться друг относительно друга без какого-либо сопротивления. Между слоями жидкости отсутствует трение (в том числе и трение покоя). Другим важным свойством жидкостей является **очень малая сжимаемость.** Сжатию жидкостей препятствуют возникающие в них силы упругости. В состоянии равновесия из-за отсутствия сил трения покоя сила реакции жидкости всегда направлена перпендикулярно поверхности раздела.

Важную роль в гидростатике играет давление:

$$\boxed{p = \frac{F}{S}} \qquad (5.5)$$

где F – модуль силы, а S – площадь, перпендикулярно которой эта сила действует.

Перечислим основные законы, которым подчиняется жидкость в равновесии.

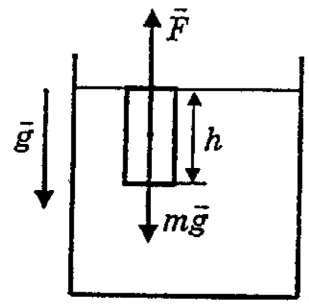


Рис. 5.3

Закон Паскаля: жидкости передают оказываемое на них давление одинаково по всем направлениям. Закон Паскаля справедлив и для газов, содержащихся в замкнутых сосудах.

Распределение давления жидкости в поле тяжести.

Рассмотрим сосуд, в котором

находится жидкость с плотностью, равной ρ (рис. 5.3).

Выделим внутри этого сосуда цилиндрический объем жидкости с площадью основания S. Верхнее основание цилиндра совпадает с поверхностью жидкости, а нижнее находится на глубине h. Сила тяжести этого цилиндра $mg = \rho Vg = \rho Shg$ уравновешивается силой давления со стороны окружающих слоев жидкости. Силы давления на боковые поверхности компенсируют друг друга, поэтому остается только сила давления $\vec{F}$ на нижнее основание цилиндра: $F = pS$, поэтому $pS = \rho Shg \Rightarrow$

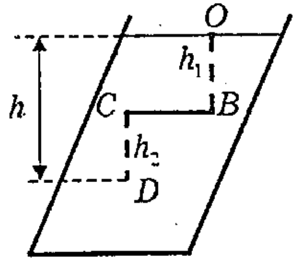


Рис. 5.4

$$\boxed{p = \rho gh} \tag{5.6}$$

Это давление называют **гидростатическим**. Не надо забывать, что на поверхность жидкости оказывает давление атмосфера или другая жидкость, причем по закону Паскаля это внешнее давление передается во все точки жидкости одинаково. Поэтому на глубине h внутри жидкости

$$p = p_0 + \rho gh, \tag{5.7}$$

где p_0 – внешнее давление, производимое на поверхность жидкости. Формулы (5.6) и (5.7) справедливы для сосудов любой формы. Возьмем, например, сосуд, форма которого приведена на рис. 5.4.

Так как точки B и O находятся на одной вертикали, то

$$p_B - p_0 = \rho gh_1. \tag{5.8}$$

Давления p_B и p_C одинаковы, а $p_D - p_C = \rho gh_2$. (5.9)

Складывая (5.8) и (5.9), получим

$$p_D - p_C + (p_B - p_0) = \rho gh_2 + \rho gh_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_D = p_0 + \rho gh_1 + \rho gh_2 = p_0 + \rho g(h_1 + h_2) = p_0 + \rho gh.$$

Если в сосудах различной формы жидкость находится на одном уровне, то давление на дно этих сосудов будет одинаково. Возьмем сосуды, формы которых указаны на рис. 5.5, имеющие одинаковые площади основания S, и заполним их жидкостью до высоты h. Силы давления на дно этих сосудов будут одинаковы:

$F = pS$, в то время как в сосудах содержатся разные по объему, а значит и по массе, количества жидкости.

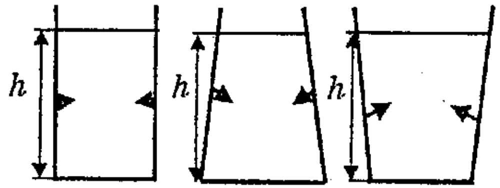


Рис. 5.5

Наибольшим весом будет обладать жидкость в третьем сосуде, а наименьшим – жидкость во втором. В этом состоит **гидростатический парадокс**: сила давления на дно сосуда может быть меньше или больше веса жидкости, находящейся в сосуде, в зависимости от формы сосуда. Объясняется гидростатический парадокс действием на жидкость сил со стороны стенок сосуда. У второго сосуда равнодействующая этих сил направлена вниз, а у третьего сосуда – вверх.

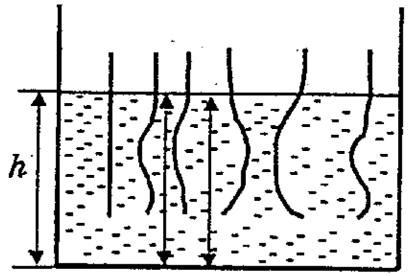


Рис. 5.6

Закон сообщающихся сосудов утверждает, что свободные поверхности однородной покоящейся жидкости в сообщающихся сосудах произвольной формы находятся на одном уровне.

На рис. 5.6 изображены сообщающиеся сосуды. Свободные поверхности – это те поверхности жидкости, которые контактируют с атмосферой. Если бы поверхность жидкости в одном из сосудов находилась на другом уровне, то у основания этого сосуда гидростатическое давление отличалось бы от давления у оснований других сосудов. Поэтому жидкость не смогла бы находиться в равновесии. В законе сообщающихся сосудов имеется в виду, что внешнее давление на свободные поверхности во всех сосудах одинаково. В

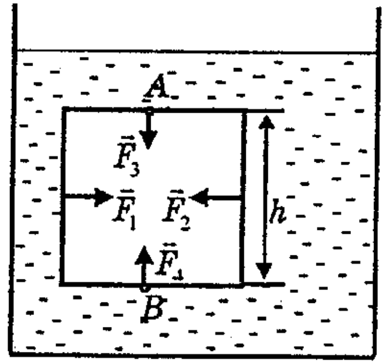


Рис. 5.7

противном случае поверхности жидкости будут находиться на разных уровнях.

Закон Архимеда утверждает, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Направлена эта сила вертикально вверх и приложена в центре масс погруженной части.

В качестве иллюстрации этот закон легко вывести для погруженного тела в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания S и высотой h (рис.5.7). Со стороны жидкости с плотностью $\rho_ж$ на тело действуют силы давления $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ компенсируют друг друга, т.е. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. $\quad F_3 = p_A S$; $\quad F_4 = p_B S \Rightarrow$

$$F_A = F_4 - F_3 = p_B S - p_A S = S(p_B - p_A) = S\rho_ж gh =$$
$$= \rho_ж (hS) g = \rho_ж V g = m_ж g.$$

Этот частный случай ясно показывает, что причиной возникновения выталкивающей (архимедовой) силы является разность сил давлений, действующих на нижнюю и верхнюю грани. Обусловлена эта разность зависимостью гидростатического давления от глубины погружения. Если тело лежит на дне сосуда, так что вода не проникает под его нижнюю поверхность, то нет и разности сил давления. Известен опыт, когда в сосуд, на дне которого лежит гладкий кусок парафина, осторожно наливают воду и при этом парафин остается на дне, не всплывая.

Закон Архимеда позволяет сформулировать **условия плавания** тел, сравнивая выталкивающую силу $\vec{F}_A$, действующую на погруженное тело, с силой тяжести $m\vec{g}$ этого тела. Если $F_A < mg$ – тело тонет, если $F_A = mg$ – тело плавает внутри жидкости, если $F_A > mg$ – тело всплывает.

Более удобным критерием плавания **сплошных тел** является сравнение их плотности ρ с плотностью жидкости $\rho_ж$. Если $\rho > \rho_ж$ – тело тонет, если $\rho = \rho_ж$ – тело плавает внутри жидкости, если $\rho < \rho_ж$ – тело всплывает. Для тел, имеющих полости, можно ввести среднюю плотность $\rho_{ср}$ и далее сравнивать ее с плотностью $\rho_ж$.

Закон Архимеда выполняется и для газов.

5.6. Элементы гидродинамики

Идеальная жидкость практически несжимаема и трение между слоями жидкости отсутствует. Движение идеальной жидкости по трубам описывают в предположении, что движение происходит без трения, т.е. не происходит превращения механической энергии жидкости во внутреннюю. Таким образом, полная механическая энергия идеальной жидкости сохраняется.

При течении идеальной жидкости через различные сечения за равные промежутки времени проходят равные массы жидкости. Отражением этого факта является **уравнение неразрывности:**

$$\boxed{\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2} \qquad (5.10)$$

где S_1 и S_2 – площади сечения трубы, υ_1, υ_2 – скорость жидкости через эти сечения.

Из уравнения неразрывности следует, что **при прохождении узких частей трубы скорость движения жидкости больше, чем при прохождении широких.**

При течении идеальной жидкости выполняется уравнение **Бернулли:**

$$\boxed{p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{const}} \qquad (5.11)$$

где p – давление жидкости, ρ – ее плотность, υ – скорость течения, h – высота выбранного элемента жидкости над нулевым уровнем.

Из уравнения Бернулли следует, что при $h = \text{const}$ **давление жидкости в трубе больше в тех частях трубы, где скорость движения меньше, и наоборот, там, где скорость движения жидкости больше, давление меньше.**

Из уравнения Бернулли следует, что скорость истечения идеальной жидкости из отверстия в сосуде равна

$$\upsilon = \sqrt{2gh}, \qquad (5.12)$$

где h – расстояние от отверстия до поверхности жидкости.

5.7. Примеры решения задач

Задача 5.1. Груз массой $m = 15$ кг, подвешенный на проволоке, отклоняется на угол $\alpha = 45°$ от вертикального положения силой, действующей в горизонтальном направлении. Определить эту силу и силу натяжения проволоки (рис. 5.8).

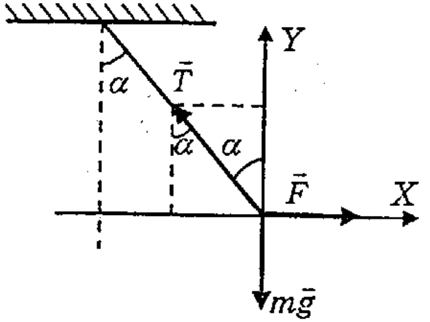


Рис. 5.8

Решение.

К грузу приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения проволоки $\vec{T}$ и сила $\vec{F}$. По условию задачи под действием этих сил груз находится в равновесии, поэтому сумма проекций этих сил на любые направления равна нулю. Удобно выбрать вертикальную и горизонтальную оси Y и X. Спроецировав силы на выбранные оси, получим систему двух уравнений:

$$\begin{matrix}\text{по оси } X \\ \text{по оси } Y\end{matrix}\begin{cases}F - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0,\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}T\sin\alpha = F \\ T\cos\alpha = mg\end{cases} \Rightarrow \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{F}{mg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg\operatorname{tg}\alpha,\ T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

После подстановки числовых данных находим $F = 150$ Н, $T = 210$ Н.

Задача 5.2. Фонарь массой $m = 20$ кг висит на двух стержнях, прикрепленных к вертикальной стене, на расстоянии AB=60см друг от друга. Длина стержней AC=90см, BC=120см. Определить силы, действующие на стержни (рис. 5.9).

Решение.

В точке C к стержням приложена сила натяжения подвеса $\vec{T}$. Так как фонарь находится в равновесии, то модуль силы натяжения T равен силе тяжести фонаря mg. Разложим силу T на две составляющие: $\vec{F}_{AC}$, действующую вдоль стержня AC, и $\vec{F}_{BC}$, действующую вдоль стержня BC. $\vec{T} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC}$, т.е. $\vec{F}_{AC}$ и $\vec{F}_{BC}$ – стороны параллелограмма, а $\vec{T}$ – его диагональ.

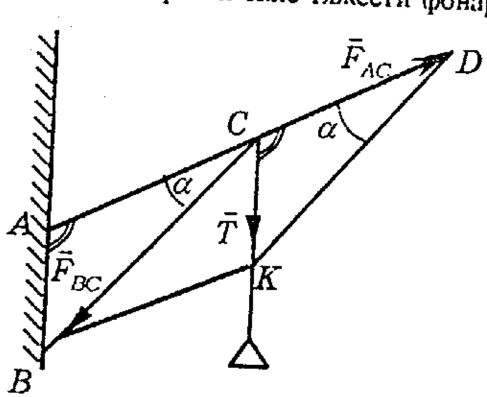


Рис. 5.9

ΔABC и ΔCDK подобны по первому признаку подобия, поэтому $\dfrac{AB}{T} = \dfrac{AC}{F_{AC}} = \dfrac{BC}{F_{BC}}$. Из этой пропорции находим, что $F_{AC} = T \cdot \dfrac{AC}{AB} = mg \cdot \dfrac{AC}{AB} \approx 300$ Н,

$$F_{BC} = T \cdot \frac{BC}{AB} = mg \cdot \frac{BC}{AB} \approx 400 \text{ Н}.$$

Задача 5.3. Ручка стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. При этом ручка давит на крышку пенала с силой $N_1 = 1{,}96$ Н. Когда пенал перевернули, сила давления ручки на крышку пенала возросла до $N_2 = 2{,}35$ Н. Какова масса ручки? (Рис. 5.10 и 5.11).

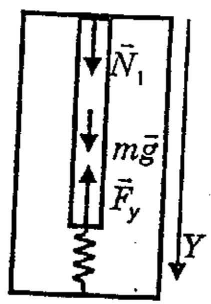


Рис. 5.10

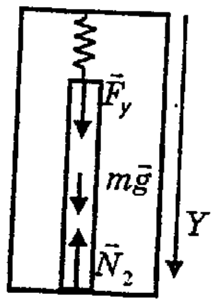


Рис. 5.11

Решение.

Прежде всего отметим, что по третьему закону Ньютона сила давления ручки на крышку пенала равна по модулю силе давления крышки на ручку.

На рис. 5.10 указаны силы, действующие на ручку в первом случае. Здесь $m\bar{g}$ – сила тяжести, $\bar{N}_1$ – сила давления крышки на ручку, $\bar{F}_y$ – сила упругости пружины. Проецируя силы на вертикальное направление Y, получаем условие равновесия ручки $N_1 + mg - F_y = 0$ (1).

На рис. 5.11 показаны силы, обеспечивающие равновесие ручки во втором случае. Отметим, что длина пенала и ручки неизменны, а потому неизменна и деформация пружины. Следовательно, модуль силы упругости во втором случае таков же, как и в первом. Условия равновесия запишутся в виде: $mg + F_y - N_2 = 0$ (2).

Складывая уравнения (1) и (2), получаем: $2mg + N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{N_2 - N_1}{2g} = 0{,}02$ кг.

Задача 5.4. Шар лежит в щели ABC, образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально. Найти угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает силу тяжести, действующую на шар. Трением пренебречь (рис. 5.12).

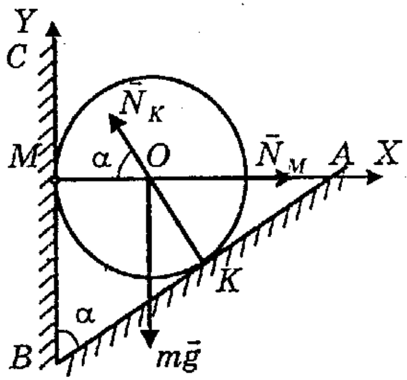


Рис. 5.12

Решение.

В точке O (центр шара) на шар действует сила тяжести $m\bar{g}$, в точках M и K – силы реакции $\bar{N}_M$ и $\bar{N}_K$, направленные по радиусам шара. Запишем первое условие равновесия на горизонтальную и вертикальную оси X и Y.

$$\begin{array}{l}\text{По оси } X\\ \text{По оси } Y\end{array}\begin{cases}N_M - N_K\cos\alpha = 0,\\ N_K\sin\alpha - mg = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_M = N_K\cos\alpha,\\ mg = N_K\sin\alpha.\end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем, что $\dfrac{mg}{N_M} = \mathrm{tg}\alpha$. По условию задачи $\dfrac{mg}{N_M} = \dfrac{1}{2}$, поэтому $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}$.

Задача 5.5 Лестница длиной $l = 3$ м стоит, упираясь верхним концом в гладкую стену, а нижним – в пол. Лестница наклонена к полу под углом $\alpha = 60°$; ее масса $m = 15$ кг. На лестнице на расстоянии $a = 1$м от ее верхнего конца стоит человек массой $M = 60$ кг. Определить силы реакции стен и пола, действующие на лестницу. При каких значениях коэффициента трения лестницы о пол лестница не падает? (Рис. 5.13).

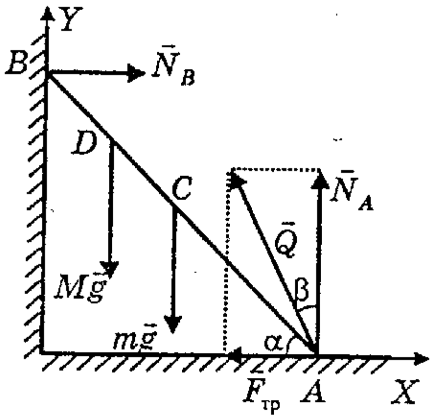


Рис. 5.13

Решение.

К лестнице приложены силы: в середине (точка C) – сила тяжести лестницы $m\bar{g}$; в точке D приложен вес человека, равный его силе тяжести $M\bar{g}$; в точке B – сила реакции стенки $\bar{N}_B$; в точке A – сила реакции пола $\bar{N}_A$ и сила трения $\bar{F}_{тр}$. Пока лестница не падает, $\bar{F}_{тр}$ – сила трения покоя. Запишем первое условие равновесия на оси X и Y.

$$\begin{array}{l}\text{По оси } X\\ \text{По оси } Y\end{array}\begin{cases}N_B - F_{тр} = 0,\\ N_A - mg - Mg = 0.\end{cases}$$

Второе условие равновесия, записанное относительно точки A:

$$N_B l\sin\alpha - Mg(l-a)\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} N_B = F_{тр}, \\ N_A = (M+m)g, \\ N_B \sin\alpha = gl\cos\alpha\left(M\left(1-\dfrac{a}{l}\right)+\dfrac{m}{2}\right). \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$N_B = \frac{(M(1-a/l)+m/2)g\cos\alpha}{\sin\alpha} = (M(1-a/l)+m/2)g\,\mathrm{ctg}\alpha =$$

$$= F_{тр} = 275\,\text{Н}.$$

$$N_A = (m+M)g = 750\,\text{Н}.$$

Пол действует на лестницу с силой $\vec{Q} = \vec{N}_A + \vec{F}_{тр}$.

По теореме Пифагора $Q = \sqrt{N_A{}^2 + F_{тр}{}^2} =$

$= \sqrt{(275)^2 + (750)^2} \approx 800$ Н.

Сила Q образует с вертикалью угол β, причем

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_{тр}}{N_A} \approx 0{,}37 \Rightarrow \beta \approx 20°.$$

Лестница не падает, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения $F_{тр.ск.} = \mu N_A = \mu(m+M)g$, где μ – коэффициент трения, т.е. $F_{тр} < \mu(m+M)g$. Подставив $F_{тр}$, получим:

$$(M(1-a/l)+m/2)g\,\mathrm{ctg}\alpha < \mu(m+M)g \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu > \dfrac{(M(1-a/l)+m/2)\mathrm{ctg}\alpha}{m+M}$. В данном случае $\dfrac{a}{l} = \dfrac{1}{3}$, поэтому $\mu > \dfrac{(2M/3+m/2)\mathrm{ctg}\alpha}{m+M} = 0{,}22$.

Лестница не будет падать при любом положении человека на ней, если $\mu > \dfrac{(M+m/2)\mathrm{ctg}\alpha}{m+M} = 0{,}54$.

Задача 5.6. Лестница опирается на шероховатую стену и пол, причем коэффициент трения о стену и пол одинаков и равен μ. Определить, при каких значениях угла между лестницей и стеной лестница будет находиться в равновесии (рис. 5.14).

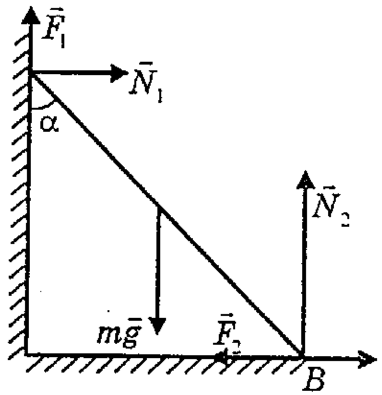


Рис. 5.14

Решение.

На лестницу действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_2$ и сила трения покоя $\vec{F}_2$ со стороны пола, сила реакции $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_1$ со стороны стены. Спроецировав силы на горизонтальное и вертикальное направления, получим два уравнения, выражающие условия равновесия:

$$N_1 - F_2 = 0 \quad (1), \qquad F_1 + N_2 - mg = 0 \quad (2).$$

Пусть длина лестницы равна l. При равновесии сумма моментов сил относительно точки B равна нулю. Получаем уравнение: $F_1 l\sin\alpha + N_1 l\cos\alpha - mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha = 0$ или

$F_1\sin\alpha + N_1\cos\alpha - \dfrac{1}{2}mg\sin\alpha = 0$. Разделив последнее уравнение на $\sin\alpha$, получим: $F_1 + N_1\mathrm{ctg}\alpha - \dfrac{1}{2}mg = 0 \Rightarrow$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{mg}{2N_1} - \frac{F_1}{N_1} \quad (3).$$

Из уравнения (2): $mg = F_1 + N_2$. Подставляя в уравнение (3), получим: $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N_2}{N_1} - \dfrac{F_1}{N_1}\right)$ (4).

Так как F_1 – сила трения покоя, то $F_1 \le \mu N_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{F_1}{N_1} \le \mu$. Аналогично $\dfrac{F_2}{N_2} \le \mu$. Из уравнения (1): $F_2 = N_1$, поэтому $\dfrac{N_1}{N_2} \le \mu \Rightarrow \dfrac{N_2}{N_1} \ge \dfrac{1}{\mu}$.

Если в правой части уравнения (4) заменить $\dfrac{N_2}{N_1}$ на $\dfrac{1}{\mu}$, то тем самым мы уменьшим правую часть. Аналогично правая часть уменьшится, если $\dfrac{F_1}{N_1}$ заменить на μ. Таким образом, при равновесии выполняется неравенство

$$\operatorname{ctg}\alpha \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \mu\right) = \frac{1-\mu^2}{2\mu}.$$

Так как $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и функция котангенс при этих значениях является убывающей, то $\alpha \le \operatorname{arctg}\dfrac{1-\mu^2}{2\mu}$.

Задача 5.7. К верхней кромке однородного бруска приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Брусок при этом остается в покое на горизонтальной поверхности. Найти построением точку приложения силы, действующей на брусок со стороны горизонтальной поверхности (рис. 5.15).

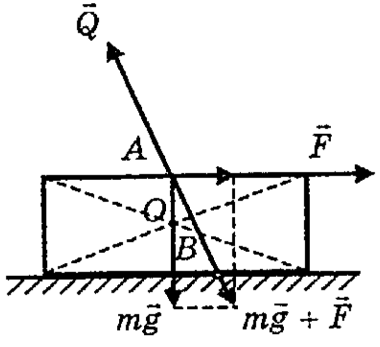


Рис. 5.15

Решение.

Центр тяжести бруска находится в его геометрическом центре (точка O). В этой точке приложена сила тяжести $m\vec{g}$. Так как брусок находится в равновесии, то все три силы ($m\vec{g}$, $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ – реакция опоры), должны пересекаться в одной точке. Этой точкой будет

являться точка A (точка пересечения продолжения векторов $m\vec{g}$ и $\vec{F}$). Так как брусок неподвижен, то

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{Q} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = -\left(m\vec{g} + \vec{F}\right).$$

Построим в точке A вектор $\left(m\vec{g} + \vec{F}\right)$, сложив силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}$ по правилу параллелограмма. Вектор $\vec{Q}$ направлен противоположно вектору $\left(m\vec{g} + \vec{F}\right)$. Продолжив его до пересечения с горизонтальной поверхностью, получим точку приложения B. Отметим, что сила $\vec{Q}$ имеет проекцию на направление, перпендикулярное плоскости (это то, что называют силой реакции опоры), и на направление, параллельное плоскости (сила трения).

Задача 5.8. Контейнер в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и длиной l стоит на опорах малых размеров. Левая опора, в отличие от правой, сделана на роликах, которые обеспечивают пренебрежимо малое трение. Чтобы сдвинуть контейнер вправо, нужно толкать его с силой $\vec{F}_1$, приложенной к середине левой стороны, а чтобы сдвинуть влево, нужно толкать с силой $\vec{F}_2$, приложенной к центру правой стороны. Найти массу контейнера (рис.5.16).

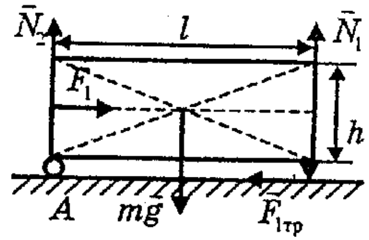


Рис. 5.16

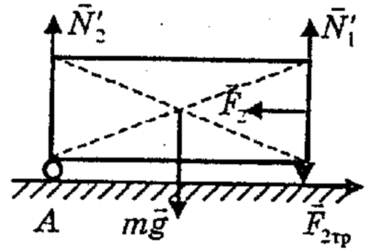


Рис. 5.17

Решение.

Рассмотрим первый случай. Силы, действующие на контейнер, представлены на рис. 5.16.

Здесь $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_1$ – силы реакции опоры, $\vec{F}_{1тр}$ – сила трения. Запишем условия равенства нулю суммы моментов сил относительно точки A:

$$F_1\frac{h}{2}+mg\frac{l}{2}-N_1l=0 \quad (1).$$

Спроецировав силы на горизонтальное направление, получаем $F_1-F_{1тр}=0 \Rightarrow F_1=F_{1тр}$. Учитывая, что скольжение начлось, $F_{1тр}=\mu N_1 \Rightarrow N_1=\frac{F_{1тр}}{\mu}$. Подставляя в уравнение (1), получим:

$$F_1\frac{h}{2}+mg\frac{l}{2}-\frac{F_1}{\mu}l=0 \quad (1').$$

Рассмотрим второй случай (рис. 5.17). Здесь $\vec{N}_1'$ и $\vec{N}_2'$ – силы реакции опоры, $\vec{F}_{2тр}$ – сила трения. Условие моментов относительно точки A запишется в виде:

$mg\frac{l}{2}-F_2\frac{h}{2}-N_1'l=0$. Так как $F_2=F_{2тр}=\mu N_1'$, то после подстановки получим уравнение: $mg\frac{l}{2}-F_2\frac{h}{2}-\frac{F_2}{\mu}l=0$ (2).

Уравнения (1′) и (2) образуют систему:

$$\begin{cases} F_1\frac{h}{2}+mg\frac{l}{2}-\frac{F_1}{\mu}l=0, \\ mg\frac{l}{2}-F_2\frac{h}{2}-\frac{F_2}{\mu}l=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1F_2\frac{h}{2}+F_2mg\frac{l}{2}-\frac{F_1F_2}{\mu}l=0, \\ F_1mg\frac{l}{2}-F_1F_2\frac{h}{2}-\frac{F_1F_2}{\mu}l=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F_1F_2\frac{h}{2}=F_1mg\frac{l}{2}-F_2mg\frac{l}{2} \Rightarrow m=\frac{2F_1F_2h}{gl(F_1-F_2)}.$$

Задача 5.9. Дан однородный диск радиусом R, в котором проделаны два отверстия радиусом $R/2$ и $R/4$, как показано на рис. 5.18. Определить положение центра тяжести диска.

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести расположен на оси симметрии диска левее точки O. Если бы отверстий не было, то центр тяжести диска располагался бы в точке O. Диск можно представить состоящим из трех частей: из диска с центром в точке O_1 радиусом $R/2$, диска радиусом $R/4$ с центром в точке O_2 и оставшейся части, заштрихованной на рисунке, центр тяжести которой отстоит от точки O на расстоянии x.

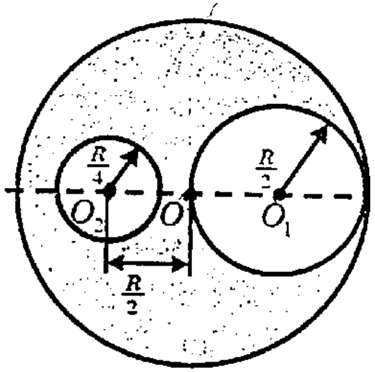


Рис. 5.18

Масса первого диска:

$$m_1=\rho V_1=\rho S_1h=\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2h=\rho\pi\frac{R^2}{4}h,$$

где ρ – плотность диска, h – его толщина. Момент, создаваемый им относительно точки O:

$$M_1=m_1g\frac{R}{2}=\rho\frac{\pi R^2}{4}hg\frac{R}{2}=\rho\pi hg\frac{R^3}{8}$$

Масса второго диска:

$$m_2=\rho V_2=\rho S_2h=\rho\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2h=\rho\pi\frac{R^2}{16}h.$$

Его момент относительно точки O:

$$M_2=-m_2g\frac{R}{2}=-\rho\frac{\pi R^2}{16}hg\frac{R}{2}=-\rho\pi hg\frac{R^3}{32}.$$

Масса оставшейся части:

$$m_3=\rho V_3=\rho\left(\pi R^2-\pi\frac{R^2}{4}-\pi\frac{R^2}{16}\right)^2gh=\rho\pi\frac{11R^2}{16}gh,$$

а момент этой части:

$$M_3 = -m_3 g x = -\rho\pi \frac{11R^2}{16} g h x.$$

При равновесии $M_1 + M_2 + M_3 = 0$.

$$\rho\pi \frac{R^3}{8} g h - \rho\pi \frac{R^3}{32} g h - \rho\pi \frac{11R^2}{16} g h x = 0 \Rightarrow$$

$$4R - R = 22x \Rightarrow x = \frac{3R}{22}.$$

Задача 5.10. Штанга массой m и длиной l закреплена нижним концом на шарнире O. К верхнему концу штанги привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на высоте H от шарнира и на одной с ним вертикали. Какой минимальный груз нужно повесить на другой конец нити, чтобы штанга устойчиво стояла в вертикальном положении? (Рис. 5.19).

Решение.

Пусть штанга отклоняется на малый угол α от вертикального положения. На штангу в точках C и A действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, причем $T = Mg$, где M – масса груза. Для устойчивого равновесия надо, чтобы при малом отклонении возникали моменты сил, возвращающие штангу в исходное положение, т.е.

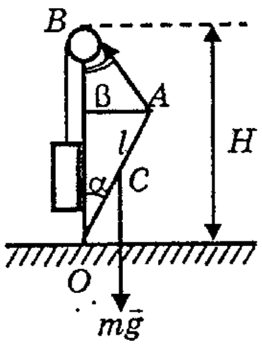


Рис. 5.19

$$MgH\sin\beta > mg\frac{l}{2}\sin\alpha,$$

$$M > \frac{ml}{2H} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Так как углы α и β малы, то

$$\sin\alpha \approx \alpha, \sin\beta \approx \beta \Rightarrow M > \frac{ml}{2H} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \ (1).$$

По теореме синусов в ΔAOB

$$\frac{H}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{l}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{H}{l} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H}{l} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{H}{l} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + \cos\alpha.$$

При малых α $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$, поэтому

$$\frac{H}{l} = \frac{\alpha}{\beta} + 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{H}{l} - 1 = \frac{H - l}{l}.$$

Подставляя в (1), получим $M > \dfrac{m(H - l)}{2H}$.

Задача 5.11. В цилиндрический сосуд налита равная масса ртути и воды. Общая высота двух слоев жидкости $H = 29{,}2$ см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3 (рис.5.20).

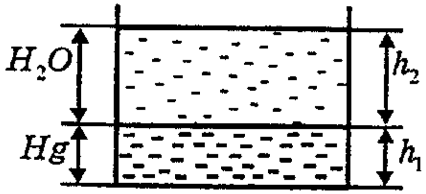


Рис. 5.20

Решение.

Пусть h_1 – высота столба ртути, а h_2 – высота столба воды. По условию задачи $h_1 + h_2 = H$.

Масса ртути в цилиндре $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S h_1$, где S – площадь основания цилиндра. Масса воды $m_2 = \rho_2 S h_2$. По условию задачи $m_1 = m_2 \Rightarrow \rho_1 S h_1 = \rho_2 S h_2$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = H, \\ \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} h_1, \\ h_1\left(1 + \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) = H, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{H}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{H\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}; \qquad h_2 = \frac{H\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Ртуть создаст давление: $p_1 = \rho_1 g h_1 = \dfrac{H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2}$;

Вода создаст гидростатическое давление:

$$p_2 = \rho_2 g h_2 = \frac{H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Давление жидкостей на дно сосуда:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{2H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2} \approx 5{,}3 \cdot 10^3\ \text{Па}.$$

Задача 5.12. Ртуть находится в U-образной трубке, площадь сечения левого колена которой в три раза меньше, чем правого. Уровень ртути в узком колене расположен на расстоянии $l = 30$ см от верхнего конца трубки. На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если левое колено доверху заполнить водой? (Рис. 5.21).

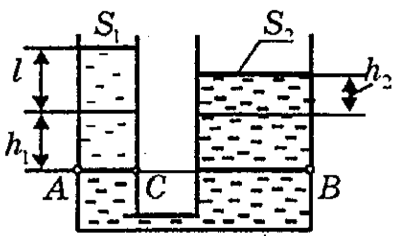


Рис. 5.21

Решение.

После доливания воды уровень ртути в левом колене опустится на h_1; над границей раздела ртуть-вода (AC) будет находиться столбик воды высотой $l + h_1$. В то же время уровень ртути в правом колене поднимется на h_2. На любом уровне давления должны быть одинаковы и, в частности, на уровне ACB.

В левом колене давление на этом уровне:

$p_1 = \rho_в g(l + h_1)$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды,

а в правом: $- p_2 = \rho_р g(h_2 + h_1)$, где $\rho_р = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность ртути.

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \rho_в g(l + h_1) = \rho_р g(h_2 + h_1).$$

Поскольку жидкости несжимаемы, то уменьшение объема ртути в левом колене равно его увеличению в правом, т.е. $\rho_в S_1 h_1 = \rho_р S_2 h_2$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho_в g(l + h_1) = \rho_р g(h_2 + h_1), \\ \rho_в S_1 h_1 = \rho_р S_2 h_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = \dfrac{\rho_р}{\rho_в}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right) h_2, \\ \rho_в\left(l + \dfrac{\rho_р}{\rho_в}\dfrac{S_2}{S_1} h_2\right) = \rho_р\left(\dfrac{\rho_р}{\rho_в}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right) h_2 + h_2\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{\rho_в l}{\rho_р\left(1 + \left(\dfrac{\rho_р}{\rho_в} - 1\right)\dfrac{S_2}{S_1}\right)} = 0{,}06\ \text{см}.$$

Задача 5.13. В вертикально расположенном сосуде с сечениями $2S$ и S находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой проволокой длиной h. Найти силу натяжения проволоки, если пространство между поршнями заполнено водой. Трением пренебречь. Концы сосуда открыты в атмосферу. Плотность воды равна ρ (рис. 5.22).

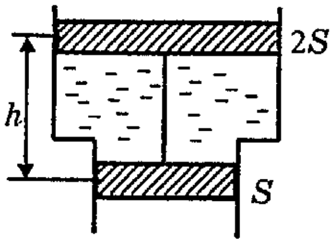


Рис. 5.22

Решение.

Силы, действующие на поршни, представлены на рис. 5.23.

На верхний поршень действуют: сила натяжения проволоки T, сила атмосферного давления, равная $p_0 \cdot 2S = 2p_0 S$, и сила давления со стороны воды, равная $p \cdot 2S = 2pS$, где p – давление воды под верхним поршнем. Условия равновесия это-

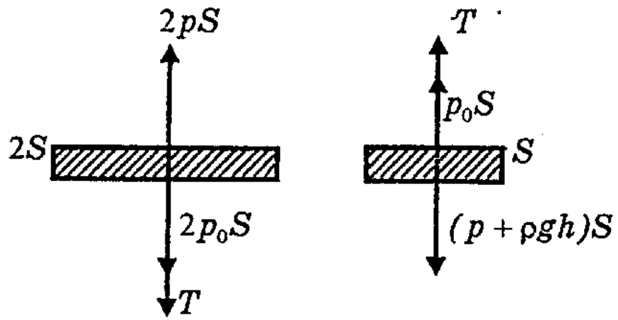


Рис. 5.23

го поршня запишутся в виде $2pS - 2p_0S - T = 0$ (1).

Давление воды над нижним поршнем отличается от давления воды под верхним поршнем на величину ρgh. Поэтому сила давления воды на нижний поршень равна $(p+\rho gh)S$. Кроме того, на этот поршень действует сила атмосферного давления p_0S и сила натяжения проволоки, равная T. Условия равновесия записываем в виде:

$$T + p_0S - (p+\rho gh)S = 0 \quad (2).$$

Перепишем уравнения (1) и (2) в виде системы:

$$\begin{cases} 2pS = 2p_0S + T, \\ pS + \rho ghS = p_0S + T, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2pS = 2p_0S + T, \\ 2pS + 2\rho ghS = 2p_0S + 2T. \end{cases}$$

После вычитания этих уравнений находим, что $T \doteq 2\rho ghS$.

Задача 5.14. Однородное тело плавает в керосине так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема тела. Определить объем погруженной части при плавании тела в воде. Плотность керосина $\rho_к = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м³ (рис. 5.24).

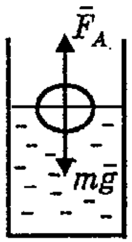


Рис. 5.24

Решение.

На тело, плавающее в керосине, действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_A$.

Так как тело плавает, $mg = \bar{F}_A$.

Пусть V – объем всего тела, а ρ – его плотность, тогда $m = \rho V$. Выразим выталкивающую силу $F_A = m_к g$, где $m_к$ – масса керосина в объеме $0{,}92V$. Поэтому $F_A = \rho_к \cdot 0{,}92Vg$. Обозначим объем погруженной части тела при плавании в воде V_x. В воде на тело действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}'_A$. Из условия плавания получаем $mg = F'_A$, где $F'_A = m_в g = \rho_в V_x g$. После подстановок получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho Vg = \rho_к \cdot 0{,}92Vg, \\ \rho Vg = \rho_в V_x g, \end{cases} \Rightarrow \rho_к \cdot 0{,}92Vg = \rho_в V_x g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{0{,}92\rho_к V}{\rho_в} = 0{,}92\frac{\rho_к}{\rho_в}V = 0{,}74V.$$

Задача 5.15. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Какова плотность тела?

Решение.

Вес тела в воздухе численно равен силе тяжести, действующей на тело (выталкивающей силой воздуха мы здесь пренебрегаем.) Для определения веса в воде тело, подвешенное, например, на динамометре, погружается в воду. В воде на тело действуют: сила тяжести $m\bar{g}$, выталкивающая сила $\bar{F}_A$ и сила упругости (натяжения) $\bar{T}$ (рис. 5.25).

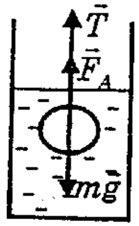


Рис. 5.25

Из условия равновесия можно записать:

$$T + F_A - mg = 0 \Rightarrow T = mg - F_A.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой тело действует на подвес (динамометр). По определению это и есть вес тела. Значит, вес в жидкости есть разность между силой тяжести и выталкивающей силой.

По условию задачи $mg = 3(mg - F_A)$ (1).

Пусть ρ_x – плотность тела, а V – его объем, тогда $m = \rho_x V$. Выталкивающая сила $F_A = m_в g = \rho_в Vg$, где $\rho_в$ – плотность воды. После подстановки в (1) получаем:

$$\rho_x Vg = 3(\rho_x Vg - \rho_в Vg) \Rightarrow \rho_x = 3(\rho_x - \rho_в) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\rho_в = 2\rho_x \Rightarrow \rho_x = \frac{3}{2}\rho_в = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 5.16. Тонкая однородная палочка плотностью $\rho = 0{,}64 \cdot 10^3$ кг/м³ закреплена шарнирно одним концом и опущена в воду. Палочка находится в равновесии, отклонившись на некоторый угол от вертикали. Какая часть палочки находится в воде? (Рис. 5.26).

Решение.

В точке C (середина палочки) приложена сила тяжести $m\vec{g}$. В точке B (середина погруженной части) приложена выталкивающая сила $\vec{F}_A$. В точке O приложена сила $\vec{N}$, действующая на палочку со стороны шарнира. Пусть O – точка вращения, тогда сумма моментов сил относительно этой точки равна нулю. Момент силы N равен нулю. Момент силы тяжести $M_{mg} = -mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha$, где l – длина палочки. Момент выталкивающей силы $M_A = F_A\left(l - \dfrac{x}{2}\right)\sin\alpha$, где x – длина погруженной части. Получаем уравнение:

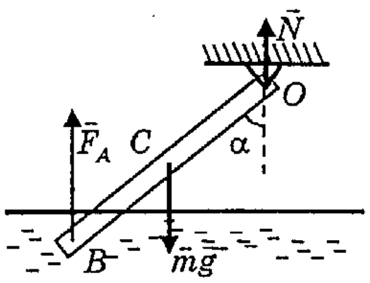


Рис. 5.26

$$F_A\left(l - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0 \quad (1).$$

Выразим выталкивающую силу: $F_A = m_в g = \rho_в V_п g = \rho_в Sxg$, где S – площадь поперечного сечения палочки. Массу палочки представим в виде $m = \rho Sl$. Подставим в уравнение (1) и получим

$$\rho_в Sxg\left(l - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha - \rho gS\frac{l^2}{2}\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_в xl - \rho_в\frac{x^2}{2} - \rho\frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow \rho_в x^2 - 2\rho_в xl + \rho l^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2lx + \frac{\rho}{\rho_в}l^2 = 0. \qquad \text{Отсюда}$$

$$x_{1,2} = l \pm l\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_в}} = l\left(1 \pm \sqrt{0{,}64}\right) = l(1 \pm 0{,}8).$$

$x_1 = 1{,}8l$, что противоречит условию задачи.

$x_2 = 0{,}2l$, что и является ответом задачи.

Задача 5.17. Стальной кубик (плотность $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3) плавает в ртути (плотность $\rho_2 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3). Поверх ртути наливается вода так, что она покрывает кубик. Какова высота h слоя воды? Длина ребра кубика $a = 10$ см (рис. 5.27).

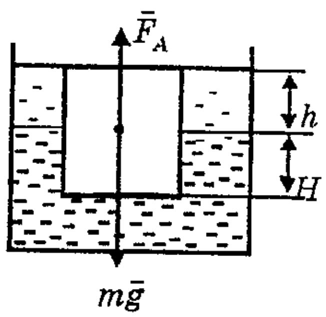


Рис. 5.27

Решение.

На кубик действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_A$. Из условия плавания получаем $mg = F_A$. Здесь $m = \rho_1 a^3$, $F_A = (m_в + m_р)g$, где $m_в$ и $m_р$ – соответственно масса воды и ртути, содержащаяся в объеме, вытесненном кубиком.

$$m_в = \rho_в V_в = \rho_в Sh = \rho_в a^2 h, \quad m_р = \rho_2 SH = \rho_2 a^2 H,$$

$$F_A = a^2 g(\rho_в h + \rho_2 H).$$

Заметим, что $h + H = a$, поэтому получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h + H = a, \\ (\rho_в h + \rho_2 H)a^2 g = \rho_1 a^3 g, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + H = a, \\ \rho_в h + \rho_2 H = \rho_1 a, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H = a - h, \\ \rho_в h + \rho_2(a - h) = \rho_1 a, \end{cases} \quad \Rightarrow h = \frac{a(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_в} \approx 4{,}6\,\text{см}.$$

Задача 5.18. В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высотой l и сечением S. При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом была совершена? Сечение стакана равно $5S$, начальная высота воды в стакане – l, плотность бруска $\rho = 0{,}5\rho_0$, где ρ_0 – плотность воды (рис. 5.28).

Решение.

Пусть брусок плавает в воде (рис. 5.28). Вертикально вниз на него действует сила тяжести $mg = \rho S\,lg$, а вертикально

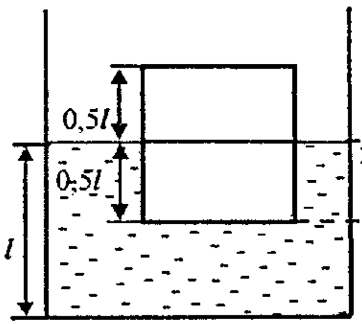


Рис. 5.28

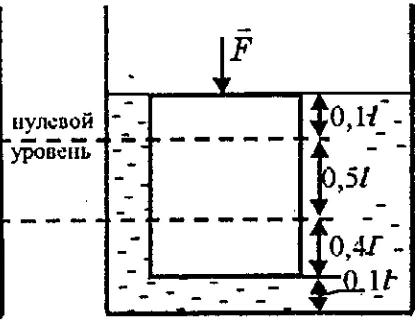


Рис. 5.29

вверх действует выталкивающая сила $F_A = \rho_0 S l_п g$, где $l_п$ – высота погруженной части бруска. Из условия плавания следует, что $mg = F_A \Rightarrow \rho S\,lg = \rho_0 S l_п g \Rightarrow l_п = \dfrac{\rho}{\rho_0} l = 0{,}5l$, что и отражено на рис. 5.28.

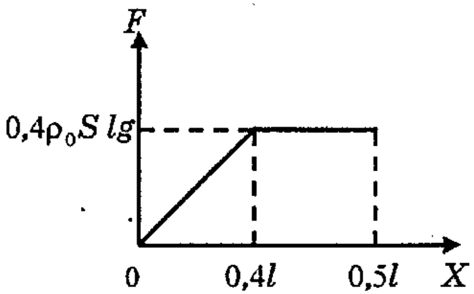


Рис. 5.30

Пусть на брусок подействовали силой F, направленной вниз. Под действием этой силы брусок сместится на расстояние x от нулевого уровня (рис. 5.29). При этом брусок вытеснил объем воды, равный Sx. В результате уровень воды в стакане повысится на y, причем y находим из уравнения $Sx = (5S - S)y \Rightarrow y = \dfrac{x}{4}$. Следовательно, смещение бруска на x приведет к тому, что длина погруженной части бруска возрастет на $y + x = \dfrac{5x}{4}$. Для того, чтобы весь брусок оказался под водой, надо, чтобы $\dfrac{5x}{4} = \dfrac{l}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2l}{5} = 0{,}4l$. Уровень воды при этом поднимется на $y = \dfrac{x}{4} = 0{,}1l$, что и отображено на рис.5.29.

Как уже отмечалось, для погружения бруска к нему надо приложить силу F, причем при медленном равномерном погружении модуль этой силы равен разности между выталкивающей силой, действующей на брусок, и силой его тяжести:

$$F = F_A - mg = \rho_0 S\left(\frac{l}{2} + x\right)g - \rho S\,lg =$$

$= \rho_0 S\left(\dfrac{l}{2} + x\right)g - 0{,}5\rho_0 S\,lg = \rho_0 Sxg$. Как видно, эта сила линейно зависит от x – смещения бруска. При полном погружении бруска $F = F(0{,}4l) = 0{,}4\rho_0 S\,lg$.

После того, как брусок погружен, дальнейшее погружение бруска на $0{,}1l$ не приводит к изменению силы F. График зависимости силы F приведен на рис. 5.30.

Как известно, работа переменной силы равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $F(x)$. Окончательно получаем:

$$A = \frac{0{,}1l + 0{,}5l}{2}\,0{,}4\rho_0 S\,lg = 0{,}12\rho_0 S l^2 g.$$

Глава 6. Молекулярная физика. Уравнение состояния. Газовые законы

6.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

В молекулярной физике ряд свойств макроскопических тел и тепловых процессов, протекающих в них, объясняются на основе представлений о молекулярном строении вещества.

В основе молекулярно-кинетической теории (МКТ) строения вещества лежат три главных утверждения:

1. Все тела состоят из огромного количества мельчайших частиц – молекул (атомов).

Массы молекул $m_0 \sim 10^{-26}$ кг, а их размеры $d \sim 10^{-10}$ м.

2. Молекулы вещества находятся в непрерывном беспорядочном движении.

При этом молекулы имеют различные по направлению и модулю скорости. Например, при температуре $t = 0°$ C большая часть молекул газов имеет скорости $\upsilon \sim 10^2 \div 10^3$ м/с.

3. Молекулы вещества взаимодействуют друг с другом.

Взаимодействие между молекулами возникает из-за того, что в состав молекул (атомов) входят отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ядра. На расстоянии порядка 2-3 диаметров молекул действуют силы притяжения, которые с уменьшением расстояния между молекулами сначала возрастают, а затем начинают убывать. Когда расстояние между молекулами становится порядка диаметра молекулы, возникают силы отталкивания, быстро возрастающие с уменьшением расстояния.

Из-за наличия сил взаимодействия молекулы обладают потенциальной энергией взаимодействия W_p.

6.2. Основные физические величины, используемые в молекулярной физике

В молекулярной физике часто используются следующие физические величины:

1. **Молекулярная масса (атомная масса)** – это отношение массы молекулы (атома вещества) m_0 к $\frac{1}{12}$ массы атома углерода.

$$\boxed{M = \frac{m_0}{\frac{1}{12} m_{0C}}} \qquad (6.1)$$

где $m_{0C} = 1{,}995 \cdot 10^{-26}$ кг – масса атома углерода. Атомные массы вычислены и проставлены в периодической системе Менделеева.

2. **Моль вещества** – это количество вещества, содержащее столько же молекул, сколько содержится атомов в $0{,}012$ кг углерода. Из этого определения следует, что моли различных веществ содержат одинаковое число молекул

$$N_A = \frac{0{,}012\text{кг}}{1{,}995 \cdot 10^{-26}\text{кг}} = 6{,}02 \cdot 10^{23} (\text{моль})^{-1}$$ (**Число Авогадро**).

3. **Количество вещества (число молей)** ν равно отношению числа молекул N в данном теле к постоянной Авогадро N_A:

$$\boxed{\nu = \frac{N}{N_A}} \qquad (6.2)$$

4. **Молярная масса вещества** – это масса одного моля вещества. Молярную массу вещества находят по формуле:

$$\boxed{\mu = M \cdot 10^3 \text{кг/моль}}, \qquad (6.3)$$

где M – молекулярная (атомная) масса вещества.

Так как моль любого вещества содержит число Авогадро молекул N_A, а масса одного моля равна молярной массе вещества μ, то массу молекулы вещества m_0 можно вычислить по формуле

$$\boxed{m_0 = \frac{\mu}{N_A}} \qquad (6.4)$$

Пусть m – масса некоторого вещества, а m_0 – масса молекулы этого вещества. Тогда в нем содержится $N = \frac{m}{m_0}$ молекул. Из (6.4) следует, что $N_A = \dfrac{\mu}{m_0}$ и, следовательно, количество вещества $\nu = \dfrac{N}{N_A} = \dfrac{m}{m_0} \bigg/ \dfrac{\mu}{m_0} = \dfrac{m}{\mu}$,

$$\boxed{\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}} \qquad (6.5)$$

где m – масса вещества.

5.**Концентрация** молекул – это отношение числа молекул N к объему, в котором они распределены V :

$$\boxed{n = \frac{N}{V}} \qquad (6.6)$$

6.3. Среднее значение квадрата скорости молекул

В силу беспорядочности движения молекул скорости отдельных молекул могут принимать любые значения $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_N$. В молекулярной физике большое значение имеет **среднее значение квадрата скорости молекул**, определяемое формулой

$$\boxed{\overline{\upsilon^2} = \frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + ... + \upsilon_N^2}{N}} \qquad (6.7)$$

где N – число молекул. Черта над $\overline{\upsilon^2}$ означает не вектор, а усреднение.

Величину, равную $\upsilon = \sqrt{\overline{\upsilon^2}}$ называют **среднеквадратичной скоростью.**

Среднее значение квадрата скорости можно выразить как $\overline{\upsilon^2} = \overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}$, где $\overline{\upsilon_x^2}, \overline{\upsilon_y^2}, \overline{\upsilon_z^2}$ – средние значения квадратов проекций скоростей. Вследствие беспорядочного движения молекул

$$\boxed{\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2} = \frac{1}{3}\overline{\upsilon^2}} \qquad (6.8)$$

Через среднее значение квадрата скорости выражается **средняя кинетическая энергия** поступательного движения молекул $\overline{W_к}$:

$$\boxed{\overline{W_к} = \frac{m_0\overline{\upsilon^2}}{2}} \qquad (6.9)$$

где m_0 – масса молекулы.

6.4. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Идеальный газ – это газ, взаимодействие между молекулами которого пренебрежимо мало. Идеальный газ можно представить как набор огромного числа молекул, которые взаимодействуют только при столкновениях. Размеры молекул идеального газа пренебрежимо малы по сравнению со средним расстоянием между ними. Молекулы изменяют направление своего движения благодаря упругим столкновениям, между столкновениями они движутся прямолинейно равномерно.

Кроме столкновений между собой молекулы идеального газа упруго сталкиваются со стенками сосуда. Поскольку число ударов молекул о стенки огромно, газ создает непрерывное давление p на стенки сосуда.

На рис. 6.1 изображено упругое столкновение молекулы со стенкой. Здесь υ_0 – модуль скорости молекулы до и после столкновения; υ_{0x} и υ_x – проекции скоростей на направление X, перпендикулярное стенке, причем $\upsilon_x = -\upsilon_{0x}$; υ_{0y} и υ_y – проекции скоростей на направление Y, параллельное стенке, причем

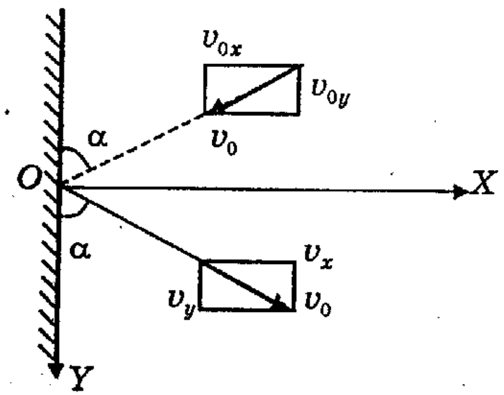


Рис. 6.1

$v_y = v_{0y}$. Представленные равенства и чертеж отражают свойства упругого удара.

Найдем изменение импульса $\Delta\vec{p}$ одной молекулы массой m_0. Вектор $\Delta\vec{p}$ имеет проекции на оси X и Y, причем

$$\Delta p_x = m_0 v_x - m_0 v_{0x} = m_0 v_0 \sin\alpha - (-m_0 v_0 \sin\alpha) =$$
$$= 2m_0 v_0 \sin\alpha = 2m_0 v_x;$$
$$\Delta p_y = m_0 v_y - m_0 v_{0y} = m_0 v_0 \cos\alpha - m_0 v_0 \cos\alpha = 0.$$

Значит, $\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2} = 2m_0 v_x$. (6.10)

За время Δt до стенки могут долететь лишь те молекулы, которые находятся на расстоянии $l_0 \le v_x \Delta t$ от стенки. Выберем на стенке площадку S, тогда за время Δt этой площадки могут достигнуть молекулы, находящиеся в воображаемом объеме с площадью основания S и высотой l_0. Если концентрация молекул равна n, то полное число молекул в этом объеме $N = nV = nSl_0 = nSv_x\Delta t$. Но из-за хаотичности движения только половина молекул в выбранном объеме движется к стенке. Поэтому количество ударов молекул о площадку S за время Δt выражается формулой:

$$\boxed{Z = \frac{1}{2} nSv_x\Delta t} \qquad (6.11)$$

Согласно (6.10) импульс одной молекулы изменяется на $2m_0 v_x$, импульс Z молекул изменится на $Z(2m_0 v_x)$. Это изменение равно импульсу силы, действующей на молекулы. Поэтому $F\Delta t = Z(2m_0 n v_x) \Rightarrow F\Delta t = m_0 nSv_x{}^2\Delta t$. Так как молекулы имеют различные скорости, то полученное равенство необходимо усреднить: $\overline{F}\Delta t = m_0 nS\overline{v_x^2}\Delta t$. Согласно формуле (6.8) $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$. Подставляя в последнюю формулу и проводя деление на S, получим уравнение:

$$\boxed{p = \frac{1}{3} m_0 n\overline{v^2}} \qquad (6.12)$$

которое называют **основным уравнением молекулярно-кинетической теории.**

Это уравнение полезно знать и в других формах. Например, $m_0 n = m_0 \dfrac{N}{V} = \dfrac{m}{V} = \rho$, где m – масса газа, а ρ – его плотность.

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}. \qquad (6.13)$$

Основное уравнение МКТ можно преобразовать следующим образом: $p = \dfrac{1}{3} m_0 n\overline{v^2} = \dfrac{1}{3} n \cdot 2\left(\dfrac{m_0\overline{v^2}}{2}\right)$, но $\dfrac{m_0\overline{v^2}}{2} = \overline{W}_к$ – средняя кинетическая энергия молекулы. В итоге получаем:

$$p = \frac{2}{3} n\overline{W}_к. \qquad (6.14)$$

Подставляя в последнюю формулу концентрацию $n = \dfrac{N}{V}$, получаем:

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} N\overline{W}_к} \qquad (6.15)$$

При этом в формуле (6.15) произведение $N\overline{W}_к$ есть суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул $W_к$. Окончательно получаем:

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} W_к}. \qquad (6.16)$$

6.5. Параметры состояния вещества. Температура

Так как любое физическое тело состоит из огромного числа молекул, то практически невозможно описать движение каждой молекулы. Систему, состоящую из очень большого числа частиц, описывают **макроскопическими величинами**, характеризующими всю систему в целом. Для газов – это давление p, объем V и температура T – **параметры состояния.**

Температура характеризует состояние теплового равновесия: такого состояния, при котором все макроскопические параметры сколь угодно долго остаются неизменными. Разность температур указывает на направление процессов теплообмена: тепловая энергия переходит от тел с большей температурой к телам с меньшей температурой.

В молекулярной физике и термодинамике температуру, как правило, выражают по шкале Кельвина (**абсолютная температура**) по формуле $T = (t^\circ + 273)$К, где t° – температура, измеряемая по шкале Цельсия.

Оказалось, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул пропорциональна абсолютной температуре

$$\boxed{\overline{W}_к = \frac{3}{2} k_Б T} \qquad (6.17)$$

где $k_Б = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Таким образом, абсолютная температура есть мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул.

6.6. Уравнение состояния идеального газа

Параметры состояния p, V, T не являются независимыми: один из них можно выразить через два других, например, $p = f(V, T)$. Уравнение, связывающее между собой параметры состояния системы, называется **уравнением состояния**. В школьном курсе физики уравнение состояния изучается для идеального газа.

Подставим в формулу (6.15) выражение для средней кинетической энергии поступательного движения молекул $\overline{W}_к = \frac{3}{2} k_Б T$. Получим:

$$\boxed{pV = Nk_Б T} \qquad (6.18)$$

Полученное уравнение связывает между собой параметры состояния p, V, T и поэтому является **уравнением состояния идеального газа, в которое входит полное число молекул N.**

Разделив обе части уравнения (6.18) на объем V, найдем $p = \frac{N}{V} k_Б T$, но $\frac{N}{V} = n$ – концентрация молекул. Поэтому

$$p = nk_Б T \qquad (6.19)$$

– уравнение состояния, в которое входит концентрация молекул n.

Выразив полное число молекул N из (6.5) как $N = \nu N_A$ и подставив в (6.18), найдем, что $pV = \nu (N_A k_Б) T$. Произведение $N_A k_Б = 6{,}02 \cdot 10^{23} (моль)^{-1} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $=$ $= 8{,}3$ Дж/моль $\cdot$ К $= R$ называют **газовой постоянной**.

Окончательно получаем:

$$\boxed{pV = \nu RT} \qquad (6.20)$$

– уравнение состояния, в которое входит количество вещества ν.

Подставив в (6.20) $\nu = \frac{m}{\mu}$, получим, что

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT} \qquad (6.21)$$

Здесь m – масса газа, а μ – его молярная масса. Уравнение (6.21) – это **уравнение Менделеева-Клапейрона** для идеальных газов. Уравнение состояния (6.21) наиболее часто используется при решении задач.

Разделив обе части уравнения (6.21) на объем V, получим, что $p = \frac{m/V}{\mu} RT$. Учитывая, что $\frac{m}{V} = \rho$ – плотность газа, получаем уравнение состояния, в которое входит плотность газа

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT. \qquad (6.22)$$

6.7. Закон Дальтона. Уравнение состояния для смеси газов

Полученные уравнения относятся к одному газу. В ряде задач приходится иметь дело со смесью химически не реагирующих газов. Давление, производимое только одной составляющей смеси газов, называется ее **парциальным давлением**. Для смеси газов выполняется **закон Дальтона**: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений составляющих смеси. Закон Дальтона отражает тот факт, что размерами молекул идеального газа можно пренебречь, и поэтому каждая составляющая занимает весь объем сосуда V.

Пусть имеется смесь газов с молярными массами $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, массы газов равны соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$. Температура смеси T, а объем, который она занимает – V. Найдем парциальное давление p_i для i-ой составляющей. Для этого надо считать, что только она одна заполняет весь сосуд объемом V и находится при температуте T. Параметры ее состояния p_i, V, T свяжем уравнением Менделеева-Клапейрона $p_i V = \dfrac{m_i}{\mu_i} RT$. Просуммировав n уравнений, найдем, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i V = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mu_i} RT \Rightarrow V\sum_{i=1}^{n} p_i = RT\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\mu_i}.$$

По закону Дальтона $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = p$, поэтому

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + ... + \frac{m_n}{\mu_n}\right) RT \qquad (6.23)$$

– это уравнение состояния для смеси идеальных газов.

6.8. Изопроцессы в газах. Законы идеальных газов

Параметры состояния идеального газа могут изменяться в результате различных процессов, производимых над ним. Если при этом масса газа остается постоянной, то из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что $\dfrac{pV}{T} = \dfrac{m}{\mu} R = \text{const}$, т.е. параметры состояния (1) и (2) связаны уравнением

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}} \qquad (6.24)$$

которое называется уравнением Клапейрона.

Если при $m = \text{const}$ остается постоянным один из параметров состояния, а два других изменяются, то говорят, что в газе **протекает изопроцесс.**

Если $m = \text{const}$ и $T = \text{const}$, то процесс называется **изотермическим**. Из уравнения Клапейрона получаем, что в этом случае

$$pV = \text{const} \text{ или } p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad (6.25)$$

– закон Бойля-Мариотта. Графиком этого процесса в осях V **и** p является гипербола $p(V) = \dfrac{\text{const}}{V}$, которую называют **изотермой.** На рис. 6.2 приведены графики двух изотермических процессов для одной массы газа, но при различных температурах T_1 и T_2.

Выберем объем V_0 и найдем соответствующие ему состояния в обоих процессах. В состоянии (1) имеем: p_1, V_0, T_1. В состоянии (2) – p_2, V_0, T_2. Так как масса газа не меняется, то, применив уравнение Клапейрона, получим $\dfrac{p_1 V_0}{T_1} = \dfrac{p_2 V_0}{T_2}$. Отсюда $T_2 = T_1\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right) > T_1$, так как $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$. Таким образом, чем **выше изотерма в осях V и p, тем более высокой температуре она соответствует.**

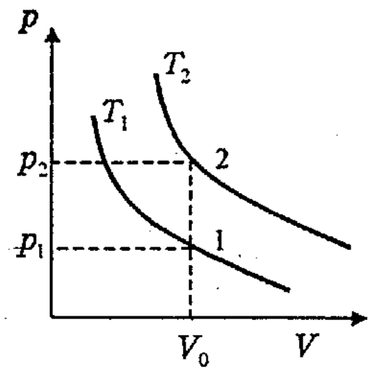


Рис. 6.2

Если $m = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то процесс называется **изобарным**. Из уравнения Клапейрона следует, что в изобарном процессе

$$\frac{V}{T} = \text{const} \Rightarrow V(T) = \text{const} \cdot T, \qquad (6.26)$$

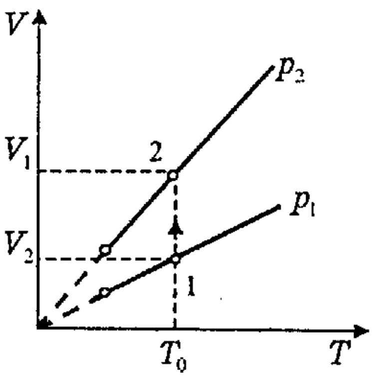


Рис. 6.3

т.е. объем пропорционален абсолютной температуре T (закон Гей-Люссака). График этого процесса в осях T и V – прямая, которую называют **изобарой**. На рис. 6.3 изображены две изобары для одной и той же массы газа, но построенные для разных давлений p_1 и p_2. Продолжение изобар проходит через начало координат, однако надо иметь в виду, что при низких температурах об идеальном газе говорить нельзя. Зафиксируем температуру T_0 и найдем соответствующие ей состояния в обоих процессах. Параметры состояния (1): p_1, V_1, T_0. Параметры состояния (2): p_2, V_2, T_0. Так как переход из состояния (1) в состояние (2) происходит при постоянной температуре, т.е. является изотермическим, то по закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < p_1$, так как $\frac{V_1}{V_2} < 1$. Таким образом, **чем выше расположена изобара в осях T, V, тем меньшему давлению она соответствует.**

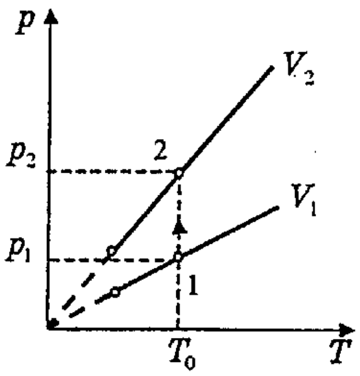


Рис. 6.4

Если $m = \text{const}$ и $V = \text{const}$, то процесс называют **изохорным**. Из уравнения Клапейрона следует, что в изохорном процессе

$$\frac{p}{T} = \text{const} \Rightarrow p = \text{const} \cdot T, \quad (6.27)$$

т.е. давление пропорционально абсолютной температуре (**закон Шарля**). График изохорного процесса в осях T, p – прямая, которую называют **изохорой**.

На рис. 6.4 изображены две изохоры для одной и той же массы, но

построенных для разных объемов V_1 и V_2. Выбрав температуру T_0 и состояния (1) и (2) на изохорах, как и в предыдущем случае, получим $p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right) < V_1$, так как $\frac{p_1}{p_2} < 1$. Отсюда следует, что **чем выше изохора расположена в осях T, p, тем меньшему объему она соответствует.**

6.9. Примеры решения задач

Задача 6.1. Оценить размер и массу молекулы воды H_2O.

Решение.

Молекулярная масса воды $M = 18$, поэтому ее молярная масса $\mu = M \cdot 10^{-3}$ кг/моль $= 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Один моль воды имеет массу $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и содержит число Авогадро молекул $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Масса одной молекулы

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A} = \frac{18 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}}{6{,}02 \cdot 10^{23}\text{ моль}^{-1}} = 3 \cdot 10^{-26}\text{ кг}.$$

Возьмем массу воды m. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ее объем $V = \frac{m}{\rho}$. С другой стороны, количество вещества $\nu = \frac{m}{\mu}$. В этом количестве воды содержится число молекул $N = N_A\nu = N_A\frac{m}{\mu}$. Они распределены в объеме V, поэтому на одну молекулу воды приходится объем

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{\left(\frac{m}{\rho}\right)}{\left(N_A \frac{m}{\mu}\right)} = \frac{\mu}{\rho N_A}.$$ Следовательно, линейный размер молекулы воды $a \sim \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} \sim 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 6.2. Вычислить среднеквадратичную скорость атомов гелия при температуре $t = 27°C$. Молярная масса гелия $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение.

Выразим среднюю кинетическую энергию атома гелия через температуру: $\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k_Б T$, где $T = 300K$, а m_0 – масса атома гелия. Искомая скорость $v = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m_0}}$. Массу атома гелия найдем по формуле (6.4): $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$. После подстановки получаем $v = \sqrt{\frac{3k_Б N_A T}{\mu}}$. Учитывая, что $k_Б N_A = R$, окончательно получаем $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1367$ м/с.

Задача 6.3. Газ занимает объем $V = 10^{-3}$ м^3 и находится под давлением $p = 5 \cdot 10^5$ Па. Вычислить суммарную кинетическую энергию поступательного движения его молекул.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся основным уравнением МКТ (6.16): $pV = \frac{2}{3} W_к$, где $W_к$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул. Отсюда $W_к = \frac{3}{2} pV = 750$ Дж.

Задача 6.4. В сосуде объемом $V = 0{,}5$ м^3 находится газ под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_1 = 300$ К. После того, как часть газа выпустили из сосуда, давление в сосуде уменьшилось до $p_2 = 10^5$ Па, а температура стала равной $T_2 = 280$ К. На сколько уменьшилось число молекул газа в сосуде?

Решение.

Сначала параметры состояния газа в сосуде равны p_1, V, T. Они связаны между собой уравнением состояния $p_1 V = N_1 k_Б T_1$, где N_1 – число молекул газа в сосуде. Аналогично, конечные параметры состояния можно связать уравнением $p_2 V = N_2 k_Б T_2$, где N_2 – конечное число молекул газа в сосуде. После вычитания уравнений получим $(p_1 - p_2)V = (N_1 - N_2)k_Б(T_1 - T_2)$. Искомое уменьшение числа молекул в сосуде: $N_1 - N_2 = \frac{(p_1 - p_2)V}{k_Б(T_1 - T_2)} = 1{,}8 \cdot 10^{26}$.

Задача 6.5. Баллон, содержащий азот N_2 под давлением $p_1 = 15 \cdot 10^4$ Па и температуре $t_1 = 27°$ C, имеет массу $M_1 = 97$ кг. Когда часть азота была израсходована, так что при температуре $t_2 = -3°$ C давление в баллоне стало равным $p_2 = 6 \cdot 10^4$ Па, масса баллона оказалась равной $M_2 = 93{,}5$ кг. Сколько молей азота осталось в баллоне?

Решение.

Решение подобных задач необходимо начинать с указания параметров состояния газа. В состоянии (1) азот в баллоне имел следующие параметры: p_1, V, T_1, где V – объем баллона. Масса азота в баллоне – m_1. Свяжем эти параметры уравнением

Менделеева-Клапейрона: $p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1$. В состоянии (2) параметры газа: p_2, V, T_2, а масса газа – m_2, поэтому $p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2$. Отметим, что объем газа не изменился, однако переход из состояния (1) в состояние (2) нельзя назвать изохорным, так как изменяется масса газа. Разделив первое уравнение на второе, найдем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Изменение общей массы баллона происходит за счет уменьшения массы азота, поэтому $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$. Получаем систему уравнений, в которой задано отношение масс m_1 и m_2 и их разность.

$$\begin{cases}\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right),\\ m_1 - m_2 = M_1 - M_2,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = m_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right),\\ m_2\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - 1\right) = M_1 - M_2,\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{M_1 - M_2}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - 1}.$$

Отметим, что T_1=(273+27)К=300К; T_2 =(273-3)К=270К. Находим, что m_2=2,8кг. Молярная масса азота N_2 $\mu = 28\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$. Значит, в баллоне осталось $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu}$ =100 молей азота.

Задача 6.6. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой m. Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном цилиндра пружиной с жесткостью k. При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H? В обоих случаях пружина растянута. Молярная масса газа равна μ. (Рис. 6.5)

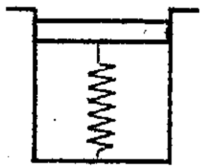


Рис. 6.5

Решение.

Силы, действующие на поршень, представлены на рис. 6.6. На поршень действуют: сила тяжести $M\vec{g}$, где M – масса поршня; сила атмосферного давления $\overline{p_0S}$, где p_0 – атмосферное давление, S – площадь поршня; сила упругости $\bar{F}_у$, причем ее модуль по закону Гука $F_у = k(l - x_0)$, где x_0 – длина нерастянутой пружины, l – ее длина в деформированном состоянии; сила давления газа под поршнем $\overrightarrow{pS}$, где p – давление газа.

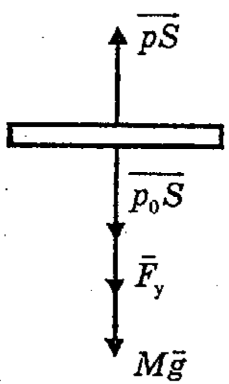


Рис. 6.6

При равновесии поршня

$pS - p_0S - Mg - F_у = 0$. Когда поршень расположен на высоте h, $F_у = k(h - x_0)$, $p = p_1$, получаем уравнение

$$p_1S - p_0S - Mg - k(h - x_0) = 0 \quad (1).$$

Когда поршень находится на высоте H, получаем уравнение

$$p_2S - p_0S - Mg - k(H - x_0) = 0 \quad (2).$$

После вычитания уравнений (1) и (2) находим, что $(p_1 - p_2)S - k(H - h) = 0$ (3).

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона в первом состоянии: $p_1V_1 = p_1Sh = \frac{m}{\mu}RT_1 \Rightarrow p_1 = \frac{m}{\mu Sh}RT_1$.

Аналогично можно выразить давление p_2 во втором состоянии. Получаем, что $p_2 = \frac{m}{\mu SH}RT_2$. После подстановки значений давления в уравнение (3) получим:

$$\frac{m}{\mu S}RS\left(\frac{T_1}{h}-\frac{T_2}{H}\right)=k(H-h)\Rightarrow T_2=T_1\frac{H}{h}+\frac{kH(H-h)\mu}{mR}.$$

Задача 6.7. Сосуды объемом $V_1 = 200\,см^3$ и $V_2 = 100\,см^3$ соединены короткой трубкой, в которой имеется теплоизолирующая пористая перегородка. С помощью этой перегородки в сосудах устанавливается одинаковое давление. Система находится при температуре $t_0 = 27°\,C$ и содержит газ при давлении $p_0 = 10^5$ Па. Какое давление установится в системе, если малый сосуд поместить в лед при температуре $t_2 = 0°\,C$, а большой – в пар при температуре $t_1 = 100°\,C$? Тепловым расширением сосудов можно пренебречь.

Решение.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в сосуде объемом V_1: $p_0V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_0$, где μ – молярная масса газа. Из этого уравнения найдем массу газа в этом сосуде $m_1 = \frac{p_0V_1\mu}{RT_0}$. Аналогично можно выразить массу газа во втором сосуде $m_2 = \frac{p_0V_2\mu}{RT_0}$.

После того, как температура сосудов изменилась, в них установилось давление p. (По условию задачи трубка, соединяющая сосуды, является с одной стороны пористой, а с другой – теплоизолирующей. Поэтому в сосудах установится одинаковое давление, хотя температура газа в сосудах окажется различной.) Масса газа в сосудах также изменится и окажется равной m_1' и m_2'. Запишем уравнение состояния для газа в сосуде объемом V_1: $pV_1 = \frac{m_1'}{\mu}RT_1 \Rightarrow m_1' = \frac{pV_1\mu}{RT_1}$. Аналогично найдем массу газа в втором сосуде: $m_2' = \frac{pV_2\mu}{RT_2}$.

Суммарная масса газа в сосудах не изменилась, поэтому $m_1 + m_2 = m_1' + m_2' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{p_0V_1\mu}{RT_0}+\frac{p_0V_2\mu}{RT_0}=\frac{pV_1\mu}{RT_1}+\frac{pV_2\mu}{RT_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=\frac{p_0(V_1+V_2)}{T_0\left(\frac{V_1}{T_1}+\frac{V_2}{T_2}\right)}=9\cdot 10^4\ \text{Па}.$$

Задача 6.8. В цилиндре с площадью сечения $S = 5\,см^2$ под поршнем массой $M = 1$ кг находится некоторый газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1{,}5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы. При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1{,}2$ раза. Определить силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

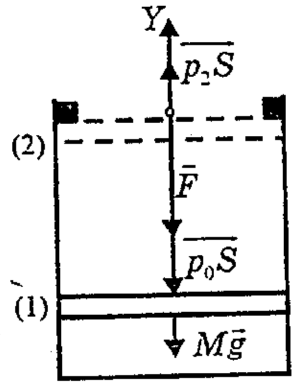


Рис. 6.7

Решение.

Рассмотрим силы, действующие на поршень в положении (2): $M\vec{g}$ – сила тяжести; $\overline{p_2S}$ – сила давления газа под поршнем; $\overline{p_0S}$ – сила атмосферного давления; $\bar{F}$ – результирующая сила со стороны уступов (рис. 6.7). Так как поршень находится в равновесии, то, спроецировав силы на вертикальное направление Y, получим:

$$p_2S - F - Mg - p_0S = 0 \Rightarrow F = p_2S - Mg - p_0S \ (*).$$

Для определения давления газа в состоянии (2) сравним параметры первого и второго состояний газа (1): p_1, V_1, T_1; (2): p_2, V_2, T_2. Переход газа из состояния (1) в состояние (2) происходит при $m = \text{const}$, поэтому можно применить уравнение Клапейрона:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = p_1 n\frac{1}{k} = p_1\frac{n}{k}.$$

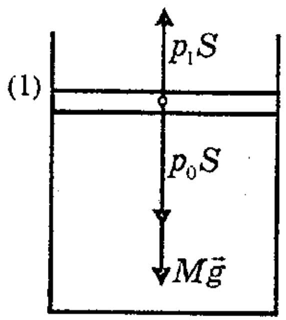


Рис. 6.8

Для определения давления газа в состоянии (1) придется еще раз рассмотреть равновесие поршня (рис.6.8).

Условия равновесия запишутся в виде:

$$p_1S - p_0S - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}.$$ Значит,

$$p_2 = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{n}{k}.$$ Подставив в уравнение (*), найдем: $F = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{n}{k}S - Mg - p_0S =$

$$= (p_0S + Mg)\frac{n}{k} - (p_0S + Mg) = \left(\frac{n}{k} - 1\right)(p_0S + Mg) = 15\text{Н}.$$

Задача 6.9. На рис. 6.9 представлен график изменения состояния идеального газа в осях V - p. Изобразить этот график в осях T - V.

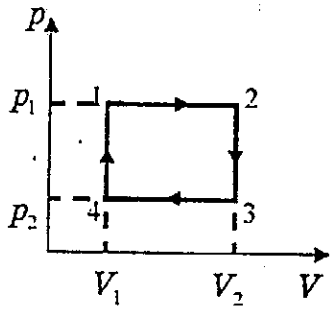


Рис. 6.9

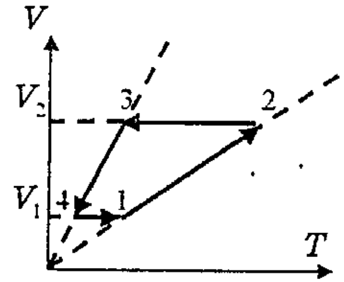


Рис. 6.10

Решение.

Участки (1-2) и (3-4) – изобары. По закону Гей-Люссака в изобарном процессе объем пропорционален абсолютной температуре $V = cT$, где $c = \text{const}$. Поэтому графики участков (1-2) и (3-4) в осях T - V – прямые, продолжения которых проходят

через начало координат. Так как $p_1 > p_2$, то изобара (1-2) располагается ниже, чем изобара (3-4).

Участки (2-3) и (4-1) – изохоры $V_2 = \text{const}$ и $V_1 = \text{const}$. Их графиками в осях T - V являются прямые, параллельные оси T. Окончательный вид графика представлен на рис. 6.10.

Задача 6.10. Моль идеального газа участвует в процессе, изображенном на рис. 6.11. Продолжение отрезков прямых (1-2) и (3-4) проходят через начало координат, а кривые (1-4) и (2-3) являются изотермами. Изобразить этот процесс в координатах V - T, (T – ось ординат) и найти объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2 = V_4$.

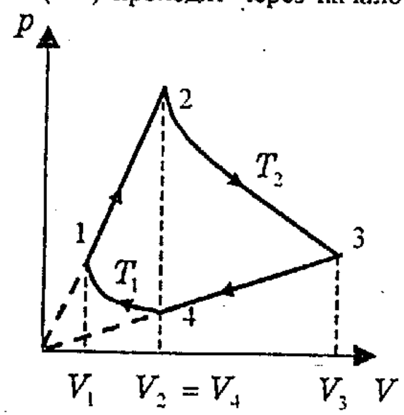


Рис. 6.11

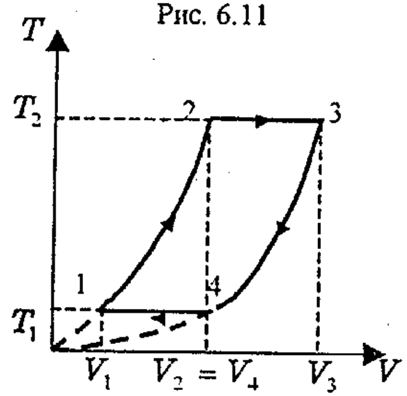


Рис. 6.12

Решение.

На участке (1-2) давление линейно зависит от объема $p = \alpha_1 V$, где $\alpha_1 = \text{const}$. Кроме того, в любом состоянии на этом участке выполняется уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = RT$ (по условию задан один моль). Подставляя в это уравнение $p = \alpha_1 V$, получаем

$$\alpha_1 V^2 = RT \Rightarrow$$

$$T(V) = \frac{\alpha_1}{R}V^2.$$ Графиком этого процесса в осях V - T является парабола (1-2) (рис. 6.12). Аналогично на участке (3-4) $p = \alpha_2 V$, где $\alpha_2 = \text{const}$, причем $\alpha_2 < \alpha_1$, поэтому $T(V) = \frac{\alpha_2}{R}V^2$. График этого процесса – парабола, изображенная на рис. 6.12. По условию задачи участки

(2-3) и (4-1) – изотермы, причем, как следует из рис. 6.11, $T_2 > T_1$. Графики этих процессов в осях V-T – прямые. Окончательный вид процесса представлен на рис. 6.12.

Так как точки 2 и 3 расположены на одной изотерме, то по закону Бойля-Мариотта $p_2V_2 = p_3V_3$. Аналогично получаем, что $p_1V_1 = p_4V_4$. После деления этих равенств одно на другое находим, что $\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_3}{p_4}\cdot\frac{V_3}{V_4}$ (1).

Так как на участке (1-2) $p = \alpha_1 V$, то $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$. Аналогично находим, что $\frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}$. Заменяя в равенстве (1) отношение давлений отношением объемов, получаем:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2\cdot V_4}{V_1} = \frac{V_2^{\,2}}{V_1}.$$

Задача 6.11. В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l = 0{,}9$ м находится столбик воздуха, ограниченный сверху столбиком ртути высотой $h = 30$ см. Ртуть доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно поворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Какова высота оставшегося столбика ртути? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па (рис. 6.13).

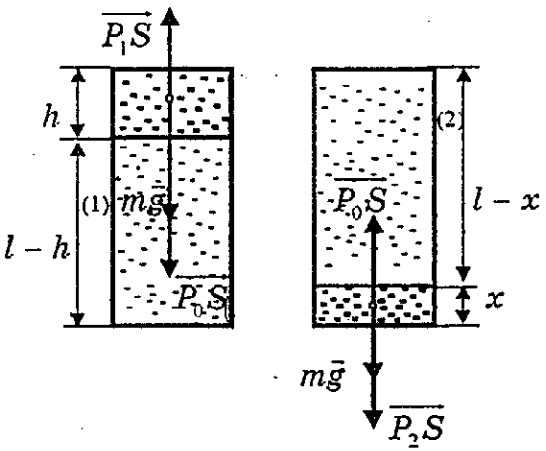


Рис. 6.13

Решение.

Укажем параметры состояния воздуха: в состоянии (1): $p_1, V_1 = S(l-h), T$; в состоянии (2): $p_2, V_2 = S(l-x), T$.

Здесь S – площадь поперечного сечения трубки, T – температура воздуха, которую во всех задачах данного типа считают одинаковой, равной температуре окружающей среды, x – высота оставшегося столбика ртути. Так как масса воздуха в трубке не изменяется, то переход из (1) в (2) является изотермическим, и по закону Бойля-Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow p_1(l-h) = p_2(l-x)$ (*).

Выразим p_1 и p_2. В состоянии (1) на столбик ртути действуют силы: $m\vec{g}$ – сила тяжести столбика ртути, $\overline{p_0S}$ – сила атмосферного давления и $\overline{p_1S}$ – сила давления воздуха. Получаем, что $p_1S - p_0S - mg = 0$. Выразив $m = \rho V = \rho Sh$ (ρ – плотность ртути), получим $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S} = p_0 + \rho gh$. В состоянии (2) условия равновесия столбика ртути запишутся в виде:

$$p_0S - p_2S - mg = 0 \Rightarrow p_2 = p_0 - \frac{mg}{S} = p_0 - \rho gx.$$

Подставив в (*), получим

$$(p_0 + \rho gh)(l-h) = (p_0 - \rho gx)(l-x).$$

Раскрыв скобки, приходим к квадратному уравнению:

$$\rho gx^2 - (p_0 + \rho gl)x + h(\rho gh + p_0 - \rho gl) = 0.$$

Вынесем из последних двух членов этого уравнения множитель ρgl, получим:

$$\rho gx^2 - \rho gl\left(\frac{p_0}{\rho gl} + 1\right)x + \rho ghl\left(\frac{h}{l} + \frac{p_0}{\rho gl} - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - lx\left(\frac{p_0}{\rho gl} + 1\right) + hl\left(\frac{h}{l} + \frac{p_0}{\rho gl} - 1\right) = 0.$$

Заметим, что ρgl – это давление столбика ртути высотой l, поэтому, если его выражать в мм рт. ст., оно будет численно равно l, выраженному в мм. В данном случае $\rho g l = 900$ мм.рт.ст. Давление $p_0 = 10^5$ Па=760мм.рт.ст., поэтому

$\frac{p_0}{\rho g l} = \frac{760}{900} = \frac{38}{45}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{3}$. Подставляя в последнее уравнение $h = 30$ см и $l = 90$ см, получаем $x^2 + 166x + 480 = 0$, корни которого $x_1 = 163$ см и $x_2 = 3$ см. Первый корень явно противоречит условию задачи, поэтому окончательно $x = 3$ см.

Задача 6.12. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1 = 10^5$ Па, во втором – при $p_2 = 0{,}6 \cdot 10^5$ Па. Объем первого баллона $V_1 = 10^{-3}$ м^3, а второго $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м^3. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна. Объемом трубки можно пренебречь.

Решение.

Газ, находившийся в сосуде объемом V_1, имел параметры состояния p_1, V_1, T, а газ, находившийся в сосуде объемом V_2 – p_2, V_2, T. После того, как открыли кран, образовалась смесь газов, причем каждая составляющая будет создавать парциальное давление p_1' и p_2' соответственно. По закону Дальтона давление смеси $p = p_1' + p_2'$ (1).

Для определения p_1' рассмотрим конечное состояние газа, находившегося в сосуде объемом V_1. Параметры его состояния $p_1', V' = (V_1 + V_2), T$. Так как масса газа и температура не изменялись, то переход из начального в конечное состояние является изотермическим. По закону Бойля-Мариотта $p_1 V_1 = p_1'(V_1 + V_2) \Rightarrow p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}$.

Аналогично можно определить парциальное давление газа, находившегося во втором сосуде: $p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2}$. Подставляя в (1), найдем давление, установившееся в сосуде:

$$p = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} + \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 6.13. В сосуде объемом $V = 3 \cdot 10^{-2}$ м^3 находится $m_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ г гелия, $m_2 = 70 \cdot 10^{-3}$ г азота и $N = 5 \cdot 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если ее температура $T = 300$ К?

Решение.

Найдем парциальное давление гелия p_1. Считая, что гелий распределен по всему объему сосуда, укажем параметры его состояния: p_1, V, T. Свяжем эти параметры состояния уравнением Менделеева-Клапейрона: $p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT$, где $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса гелия. Отсюда $p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V}$. Аналогично найдем парциальное давление азота p_2: $p_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}$, где $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота. Для нахождения парциального давления водорода p_3 воспользуемся уравнением состояния (6.18):

$p_3 V = N k_Б T \Rightarrow p_3 = \frac{N k_Б T}{V}$. По закону Дальтона давление смеси: $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{N k_Б T}{V} =$

$$= \frac{T}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} R + \frac{m_2}{\mu_2} R + N k_Б\right) = \frac{T}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} R + \frac{m_2}{\mu_2} R + N \frac{R}{N_A}\right) =$$

$$= \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{N}{N_A}\right) = 9{,}8 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Задача 6.14. Сосуд объемом $V = 30$ дм^3 разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми перегородками.

В левую часть вводят $m_1 = 30$ г водорода, в среднюю $m_2 = 160$ г кислорода и в правую $m_3 = 70$ г азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую – водород и азот. Какое давление установится в каждой части сосуда, если он поддерживается при постоянной температуре $T = 300$ К?

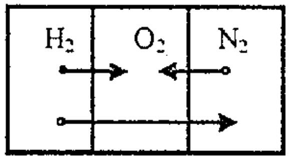


Рис. 6.14

Решение.

На рис. 6.14 показано начальное распределение газов в сосуде и направление диффузии газов. На рис. 6.15 представлено окончательное распределение газов в сосуде.

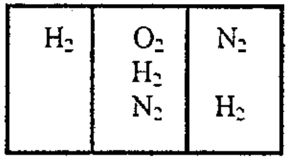


Рис. 6.15

Как следует из рис. 6.15, после установления равновесия водород распределен по всему сосуду, поэтому $p_1 V = \dfrac{m_1}{\mu_1} RT$, где p_1 – давление водорода, а $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – его молярная масса. Находим $p_1 = \dfrac{m_1}{\mu_1} \cdot \dfrac{RT}{V} = 1{,}3 \cdot 10^6$ Па. Таким будет давление в левой части сосуда.

После установления равновесия азот распределен по $\dfrac{2}{3}V$.

Из уравнения состояния $p_3 \cdot \dfrac{2}{3} V = \dfrac{m_3}{\mu_3} RT$ находим давление азота $p_3 = \dfrac{3m_3}{2\mu_3} \cdot \dfrac{RT}{V}$, где $\mu_3 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота. После подстановки находим $p_3 = 0{,}31 \cdot 10^6$ Па. Давление в правой части сосуда есть сумма парциальных давлений водорода и азота: $p_п = p_1 + p_3 = 1{,}6 \cdot 10^6$ Па.

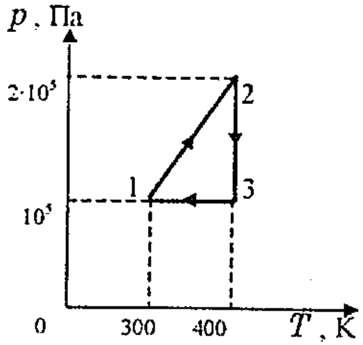


Рис. 6.16

Кислород распределен только в $\dfrac{1}{3}V$. Из уравнения состояния находим его давление $p_2 = \dfrac{3m_2}{\mu_2} \cdot \dfrac{RT}{V}$, где $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. После подстановки находим $p_2 = 1{,}3 \cdot 10^6$ Па. Давление в средней части сосуда равно сумме парциальных давлений всех газов:

$$p_с = p_1 + p_2 + p_3 = 2{,}9 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Задача 6.15. На рис. 6.16 изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса кислорода. Известно, что максимальный объем, который занимал газ в этом процессе $V_{max} = 16{,}4$ дм^3. Определить массу газа и его объем в точке 1.

Решение.

Из условия задачи $\dfrac{p_2}{p_1} = 2$, а $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{4}{3}$, т.е. $\dfrac{p_2}{p_1} \neq \dfrac{T_2}{T_1}$.

Значит, процесс (1-2) не является изохорным, продолжение прямой (1-2) не проходит через начало координат. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu} RT \Rightarrow V = \dfrac{m}{\mu} R \dfrac{T}{p}$. Следовательно, объем максимален в состоянии, где максимально отношение $\dfrac{T}{p}$, т.е. в точке 3. Итак, $V_{max} = V_3$. Применив уравнение Менделеева-Клапейрона к состоянию (3), получим $p_3 V_3 = \dfrac{m}{\mu} RT_3 \Rightarrow m = \dfrac{p_3 V_3 \mu}{RT_3}$, где $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода. После подстановки найдем

$m = 16 \cdot 10^{-3}$ кг. Так как (1-3) – изобара, то по закону Гей-Люссака $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_3}{T_3} \Rightarrow V_1 = V_3 \dfrac{T_1}{T_3} = 12{,}3$ дм^3.

Задача 6.16. Цилиндрический сосуд длиной $L = 1{,}5$ м, разделенный легким теплонепроницаемым поршнем, заполнен идеальным газом. В начальном состоянии объем левой части сосуда вдвое больше правой, а температура в обеих частях одинакова. На сколько переместится поршень, если температуру в правой части увеличить вдвое? Температура в левой части поддерживается постоянной (рис. 6.17).

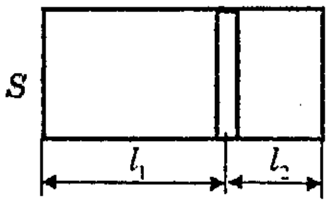


Рис. 6.17

Решение.

Пусть m_1 – масса газа в левой части, а m_2 – в правой части сосуда. T_1 – температура в обеих частях цилиндра, p_1 – давление справа и слева от поршня (оно одинаково, так как поршень находится в равновесии). Записав уравнение Менделеева-Клапейрона, получим для газа в левой части сосуда: $p_1 V_1 = \dfrac{m_1}{\mu} R T_1$ (1), и в правой части: $p_1 V_1 = \dfrac{m_2}{\mu} R T_1$ (2). Разделив (1) на (2), найдем, что $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = 2$ (3).

Учтем также, что $V_1 = l_1 S$, а $V_2 = l_2 S$, где S – площадь поперечного сечения цилиндра. Тогда $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{l_1 S}{l_2 S} = \dfrac{l_1}{l_2} = 2$. По условию задачи известно, что $l_1 + l_2 = L$, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{l_1}{l_2} = 2, \\ l_1 + l_2 = L, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} l_1 = \dfrac{2}{3} L, \\ l_2 = \dfrac{1}{3} L. \end{cases}$$

После увеличения температуры в правой части до T_2 $\left(\dfrac{T_2}{T_1} = 2\right)$ поршень смещается влево на расстояние x. Объем газа в левой части $V_1' = V_1 - Sx$, его температура – T_1, а давление – p_2. Объем газа в правой части $V_2' = V_2 + Sx$, его температура – T_2, а давление – p_2. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, получим:

$$\begin{cases} p_2 (V_1 - Sx) = \dfrac{m_1}{\mu} R T_1, \\ p_2 (V_2 + Sx) = \dfrac{m_2}{\mu} R T_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - Sx}{V_2 + Sx} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 - Sx = V_2 + Sx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{V_1 - V_2}{2S} = \frac{l_1 S - l_2 S}{2S} = \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{2L/3 - L/3}{2} = \frac{L}{6}.$$

Задача 6.17. В сосуде с газом поддерживается температура T_1. Вне сосуда находится газ, давление которого – p_2, а температура – T_2. Чему равно давление газа внутри сосуда, если в его стенке имеется небольшое отверстие? Газы разрежены.

Решение.

Давление газа p_1 в сосуде можно выразить, используя уравнение (6.19), в которое входит концентрация молекул n_1. Получаем $p_1 = n_1 k_Б T_1$. Аналогично давление газа вне сосуда $p_2 = n_2 k_Б T_2$, где n_2 – концентрация молекул вне сосуда. Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad (1).$$

В равновесном состоянии число молекул, влетающих в сосуда за любой промежуток времени Δt, равно числу молекул, вылетающих из этого сосуда. Как было показано при выводе основного уравнения МКТ, количество молекул, сталкивающихся с площадкой S, вычисляется по формуле $Z = \frac{1}{2} n S \upsilon_x \Delta t$, где υ_x – среднее значение модуля проекции скорости на ось X, направленную перпендикулярно площадке. Таким образом, если S - площадь отверстия, то за промежуток времени Δt из сосуда вылетает $Z_1 = \frac{1}{2} n_1 S \upsilon_{1x} \Delta t$ молекул, а влетает $Z_2 = \frac{1}{2} n_2 S \upsilon_{2x} \Delta t$. Так как $Z_1 = Z_2$, то $n_1 \upsilon_{1x} = n_2 \upsilon_{2x} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\upsilon_{2x}}{\upsilon_{1x}}$. Но υ_x пропорциональна среднеквадратичной скорости молекул, равной $\upsilon = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m_0}}$, где m_0 – масса молекулы, а T – температура (см. задачу 6.2). Таким образом, $\upsilon_x \sim \upsilon \sim \sqrt{T}$. Следовательно, $\frac{\upsilon_{2x}}{\upsilon_{1x}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, а значит $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\upsilon_{2x}}{\upsilon_{1x}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Подставляя отношение концентраций в формулу (1), находим: $p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{T_1}{T_2} = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

Глава 7. Термодинамика. Насыщенные и ненасыщенные пары. Поверхностное натяжение жидкостей

7.1. Основные термодинамические величины

Теория тепловых процессов, в которой не учитывается молекулярное строение вещества, называется термодинамикой. Основу термодинамики составляют два закона, выражающих свойства энергии в тепловых процессах. Основными величинами в термодинамике являются внутренняя энергия U, количество теплоты Q и термодинамическая работа A.

7.2. Внутренняя энергия

Внутренняя энергия макроскопического тела равна сумме кинетических энергий всех молекул и потенциальных энергий взаимодействия всех молекул друг с другом. В общем случае внутренняя энергия тела зависит от температуры T и объема V.

В идеальном одноатомном газе молекула движется поступательно, не взаимодействуя с другими молекулами. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\overline{W} = \frac{3}{2} k_Б T$, а число молекул $N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A$. Поэтому внутренняя энергия идеального одноатомного газа: $U = N\overline{W} = \frac{m}{\mu} N_A \cdot \frac{3}{2} k_Б T$. Учитывая, что произведение числа Авогадро N_A на постоянную Больцмана $k_Б$ равно газовой постоянной R, окончательно получаем:

$$\boxed{U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT} \qquad (7.1)$$

Формула (7.1) показывает, что внутренняя энергия идеального одноатомного газа зависит только от температуры ($U \sim T$). Это свойство справедливо и для многоатомных идеальных газов, но коэффициент пропорциональности отличен от $3/2$. Это связано с тем, что сложные молекулы совершают не только поступательное, но и вращательное движение.

7.3. Количество теплоты. Уравнение теплового баланса

Количество теплоты Q – это энергия, которую тело получает или отдает в процессах теплообмена (теплопередачи), т.е. без совершения работы. Если $Q > 0$, то считают, что тело теплоту получает, если $Q < 0$, то отдает.

При $Q = 0$ тело теплоту не получает и не отдает. Термодинамический процесс, в котором происходит изменение параметров состояния p, V, T без подвода или отвода теплоты ($Q = 0$), называется **адиабатным**.

Для вычисления количества теплоты, которое надо сообщить телу массой m с удельной теплоемкостью c для нагревания его от начальной температуры t_1 до конечно t_2 используют формулу:

$$\boxed{Q = cm(t_2 - t_1) = cm(T_2 - T_1)} \tag{7.2}$$

Произведение $cm = C$ называют **теплоемкостью** тела. Формулу (7.2) можно переписать в виде $Q = C(t_2 - t_1)$. Если тело охлаждается ($t_2 < t_1$), то количество теплоты Q, рассчитанное по формуле (7.2), отрицательно, что соответствует выделению теплоты.

В некоторых случаях удобно использовать **молярную теплоемкость** c_μ – теплоемкость одного моля вещества. При этом количество теплоты вычисляется по формуле $Q = c_\mu \nu(t_2 - t_1)$, где $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ – количество вещества. Как нетрудно видеть, теплоемкость всего тела $C = c_\mu \nu$, а удельная теплоемкость $c = \dfrac{c_\mu}{\mu}$.

Тело получает или отдает теплоту при переходе из одного агрегатного состояния в другое.

Процесс превращения жидкости в пар называется **парообразованием**, обратный процесс – **конденсацией**. Для превращения жидкости в пар ей необходимо сообщить количество теплоты

$$\boxed{Q_п = rm} \tag{7.3}$$

где m – масса жидкости, а r – удельная теплота парообразования при данной температуре. При конденсации пара происходит выделение такого же количества теплоты $|Q_к| = rm$ или $Q_к = -rm$ ($Q_к < 0$).

При определенной температуре (температуре плавления) кристаллические тела могут переходить в жидкое состояние. Этот процесс называется **плавлением**, обратный процесс – **кристаллизацией**. Для того, чтобы расплавить тело массой m, ему необходимо сообщить количество теплоты:

$$\boxed{Q_{пл} = \lambda m} \tag{7.4}$$

где λ – удельная теплота плавления вещества. При кристаллизации выделяется такое же количество теплоты $|Q_{кр}| = \lambda m$ или $Q_{кр} = -\lambda m$ ($Q_{кр} < 0$).

При теплообмене между телами количество теплоты Q_1, отдаваемое более нагретым телом, взятое по модулю, равно количеству теплоты Q_2, получаемому более холодным телом. При этом $Q_1 < 0$, а $Q_2 > 0$, поэтому

$$\boxed{|Q_1| = Q_2 \Leftrightarrow -Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow Q_1 + Q_2 = 0} \tag{7.5}$$

Это уравнение называется **уравнением теплового баланса**. Уравнение теплового баланса применяют и в том случае, когда в теплообмене участвует более двух тел.

7.4. Работа в термодинамике

Работа, которую совершает тело при его расширении над окружающими телами, называют **термодинамической работой**. Если происходит расширение тела, то термодинамическая работа положительна: $A > 0$. Когда тело сжимается, то внешние силы производят положительную работу $A_{внеш} > 0$. Термодинамическая работа тела при его сжатии отрицательна: $A < 0$. Работа внешних сил и термодинамическая работа равны по модулю и всегда отличаются знаком: $A = -A_{внеш}$.

В дальнейшем, говоря о термодинамической работе, мы будем подразумевать работу, совершаемую идеальным газом.

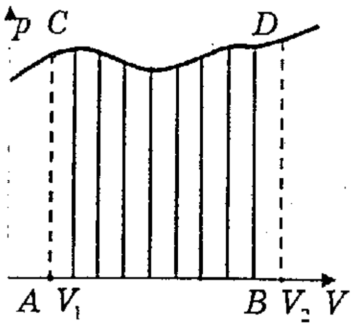


Рис. 7.1

Для определения работы газа в произвольном процессе $p(V)$ необходимо построить график этого процесса в осях p, V. **Работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 численно равна площади криволинейной трапеции $ABCD$** (рис. 7.1).

$$\boxed{A = S_{ABCD} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V} \quad (7.6)$$

Если газ сжимают от объема V_2 до V_1, то работа газа $A < 0$, поэтому

$$A = -S_{ABCD} = \int_{V_2}^{V_1} p(V)\mathrm{d}V.$$

Как правило, при решении конкурсных задач не возникает необходимости вычислять интеграл для определения термодинамической работы.

7.5. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам

Первый закон термодинамики – это закон сохранения энергии, примененный к тепловым явлениям. Согласно этому закону **количество теплоты Q, переданное системе, идет на изменение ее внутренней энергии ΔU и на работу A, которую система совершает над внешними телами.**

$$\boxed{Q = \Delta U + A} \quad (7.7)$$

В формуле (7.7) изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$, где U_2 – конечное значение внутренней энергии, а U_1 – ее начальное значение.

Из первого закона термодинамики следует, что внутренняя энергия системы изменяется при совершении работы и при передаче количества теплоты. При этом важно понимать, что в каждом состоянии система обладает определенной внутренней энергией. Количество теплоты и работа показывают, как изменяется внутренняя энергия системы.

Рассмотрим применение первого закона термодинамики к различным процессам в идеальных газах.

1. **Изотермический процесс** ($T = \text{const}$). Так как $U \sim T$, то в изотермическом процессе $U = \text{const}$, т.е. внутренняя энергия не меняется. Поэтому $\Delta U = 0$ и первый закон термодинамики для процесса запишется в виде $Q = A$ (вся сообщенная газу теплота идет на совершение работы).

Для вычисления работы в изотермическом процессе из уравнения Менделеева-Клапейрона выразим $p(V) = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$ и подставим в формулу (7.6):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} =$$

$$= \frac{m}{\mu}RT\ln|V|\,\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{m}{\mu}RT(\ln V_2 - ln\,V_1) = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

2. **Изохорный процесс** ($V = \text{const}$). Так как $V = \text{const}$, то $A = 0$ и первый закон термодинамики запишется в виде $Q = \Delta U$ (вся сообщенная газу теплота идет на изменение внутренней энергии).

3. **Изобарный процесс** ($p = \text{const}$). В этом процессе сообщенная газу теплота расходуется как на изменение внутренней энергии, так и на совершение работы. Для вычисления работы в изобарном процессе можно воспользоваться графиком зависимости $p(V)$ (рис. 7.2) и найти, что

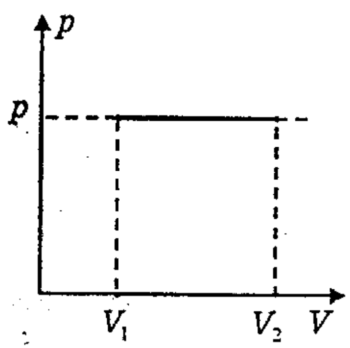


Рис. 7.2

$$\boxed{A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V} \quad (7.8)$$

В изобарном процессе работа равна произведению давления на изменение объема ΔV.

На примере трех рассмотренных процессов видно, что термодинамическая работа зависит от того, в каком процессе она совершается.

4. **Адиабатный процесс.** По определению в этом процессе $Q = 0$, поэтому первый закон термодинамики записывается в виде $A = -\Delta U = U_1 - U_2$, где U_1 и U_2 – соответственно начальное и конечное значения внутренней энергии. Для идеального одноатомного газа $A = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$, где T_1 и T_2 – начальное и конечное значения температуры.

5. **Замкнутый процесс (цикл).** В ходе замкнутого процесса газ возвращается в состояние с исходными параметрами p, V, T. Пример замкнутого процесса приведен на рис. 7.3. Так как газ возвращается в исходное состояние с той же температурой, то $\Delta U = 0$. Первый закон термодинамики для замкнутого процесса запишется в виде $Q = A$, где A – работа за цикл. **В замкнутом процессе работа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком** $p(V)$ (рис. 7.3).

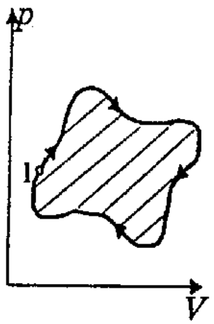


Рис. 7.3

7.6. Теплоемкость идеального газа в изохорном и изобарном процессах

Пусть над 1 молем идеального газа совершается изохорный процесс: $V = \text{const}$. Теплоемкость 1 моля идеального газа (молярная теплоемкость) $c_V = \frac{Q}{\Delta T}$, где ΔT – изменение температуры газа. Количество теплоты, сообщенное газу: $Q = \Delta U$, поэтому теплоемкость газа в изохорном процессе

$$\boxed{c_V = \frac{\Delta U}{\Delta T}} \qquad (7.9)$$

Если газ одноатомный, то

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Следовательно,

$$\boxed{c_V = \frac{3}{2}R} \qquad (7.10)$$

Пусть над 1 молем идеального газа совершается изобарный процесс: $p = \text{const}$. Молярная теплоемкость в этом процессе

$$c_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} = c_V + \frac{A}{\Delta T} = c_V + \frac{p\Delta V}{\Delta T}.$$

Для твердых и жидких веществ объем мало зависит от температуры, т.е. $\frac{\Delta V}{\Delta T} \to 0$. Поэтому для твердых и жидких веществ $c_p \approx c_V$.

Для идеальных газов $\frac{\Delta V}{\Delta T} \neq 0$. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояний в изобарном процессе. Мы получим, что $pV_1 = RT_1$ и $pV_2 = RT_2$. После вычитания этих уравнений найдем:

$$p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) \Leftrightarrow p\Delta V = R\Delta T \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{R}{p} \neq 0.$$

Следовательно, $c_p = c_V + R$, или

$$\boxed{c_p - c_V = R} \qquad (7.11)$$

Полученная формула справедлива для любых идеальных газов. Из нее также следует, что $c_p > c_V$.

Если газ является одноатомным, то

$$\boxed{c_p = \frac{5}{2}R} \qquad (7.12)$$

7.7. Второй закон термодинамики. Тепловые машины

Все макроскопические процессы в природе необратимы, т.е. они самопроизвольно могут протекать только в одном определенном направлении; в обратном направлении они могут протекать только как одно из звеньев более сложного процесса.

Примерами необратимых процессов в термодинамике являются: 1) переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому в процессе теплообмена, но не наоборот; 2) самопроизвольный переход механической энергии во внутреннюю, но не наоборот. Указанные процессы могут протекать в обратном направлении лишь при условии, что они не являются самопроизвольными, т.е. представляют собой часть более сложного процесса. Необратимость процессов в природе является следствием второго закона термодинамики. Существует несколько равносильных формулировок этого закона.

Клаузиус сформулировал второй закон термодинамики следующим образом: **невозможно перевести теплоту от более холодной системы к более горячей при отсутствии других изменений в обеих системах или окружающих телах.**

Кельвин сформулировал второй закон термодинамики в применении к тепловым машинам. Тепловые машины преобразуют тепловую энергию в работу. Все тепловые машины работают по замкнутому процессу (циклу). Согласно второму закону термодинамики в формулировке Кельвина **невозможно осуществить замкнутый процесс, единственным результатом которого было бы превращение в механическую работу теплоты, взятой у какого-нибудь тела без того, чтобы произошли какие-либо изменения в других телах.** Отсюда следует, что в замкнутом процессе всю полученную теплоту невозможно преобразовать в работу. Часть этой теплоты неизбежно будет передана какому-либо другому телу.

Независимо от конструктивных особенностей любая тепловая машина содержит **нагреватель, рабочее тело, холодильник.** Рабочим телом у всех тепловых машин является газ или пар, который совершает работу при расширении. **Нагреватель** – это тело, от которого рабочее тело получает теплоту. **Холодильник** – это тело, которому рабочее тело неизбежно передает часть теплоты, полученной от нагревателя.

Как было показано в разделе 7.3., работа в замкнутом процессе равна общему количеству теплоты за цикл: $A = Q$. Количество теплоты $Q = Q_н + Q_х$, где $Q_н > 0$ – теплота, получаемая от нагревателя, $Q_х < 0$ – теплота, отдаваемая холодильнику. Тогда работа $A = Q_н + Q_х$ или

$$\boxed{A = Q_н - |Q_х|} \qquad (7.13)$$

Другими словами, работа, которую совершает тепловая машина за цикл, равна разности между теплотой, полученной от нагревателя, и теплотой, отданной холодильнику, взятой по модулю.

Эффективность преобразования теплоты в работу количественно оценивается при помощи коэффициента полезного действия тепловой машины (КПД):

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = 1 - \frac{|Q_х|}{Q_н}} \qquad (7.14)$$

Если КПД необходимо выразить в процентах, то η умножают на 100%.

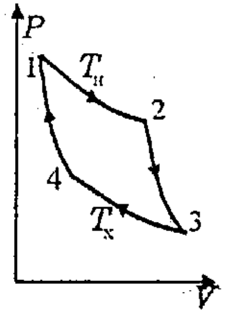


Рис. 7.4

Максимальным КПД обладает идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, состоящему из двух изотерм (1-2) и (3-4) и двух адиабат (2-3) и (4-1) (рис. 7.4), причем

$$\boxed{\eta_{max} = \frac{T_н - T_х}{T_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н}} \qquad (7.15)$$

где $T_н$ – температура нагревателя, $T_х$ – температура холодильника.

Из формулы (7.15) следует, что для увеличения КПД тепловой машины необходимо увеличить разность между температурами нагревателя и холодильника.

7.8. Холодильные машины

Тепловые машины могут совершать цикл в обратном направлении. В этом случае холодильником по-прежнему называют тело с более низкой температурой $T_х$, несмотря на то, что оно теперь отдает теплоту рабочему телу, т.е. $Q_х > 0$. Нагревателем остается тело, имеющее более высокую температуру $T_н$, хотя оно будет получать теплоту от рабочего тела: $Q_н < 0$. Осуществляется обратный цикл за счет работы внешних сил $A_{внеш} > 0$. Таким образом, когда тепловая машина работает по обратному циклу, она становится **холодильной машиной**. Работа за цикл такой машины $A = -A_{внеш} < 0$. Как и для тепловой машины эта работа

$$A = Q = Q_х + Q_н = Q_х - |Q_н| \Rightarrow |Q_н| = Q_х - A \Rightarrow$$

$$\boxed{|Q_{н}| = Q_{х} + A_{внеш}} \qquad (7.16)$$

Итак, в холодильной машине теплота, отдаваемая нагревателю, есть сумма теплоты, отнимаемой у холодильника, и работы внешних сил.

Эффективность холодильной машины оценивается **холодильным коэффициентом**

$$\boxed{\varepsilon = \frac{Q_{х}}{A_{внеш}}} \qquad (7.17)$$

Если холодильная машина работает по обратному циклу Карно, то холодильный коэффициент

$$\boxed{\varepsilon = \frac{T_{х}}{T_{н} - T_{х}}} \qquad (7.18)$$

Следует отметить, что холодильный коэффициент может принимать значения меньшие, равные или большие 1 (100%).

7.9. Свойства реального газа

Реальный газ отличается от идеального тем, что в нем нельзя пренебречь взаимодействием молекул. Рассмотрим изотермическое сжатие реального газа: $T_1 = \text{const}$ (рис. 7.5).

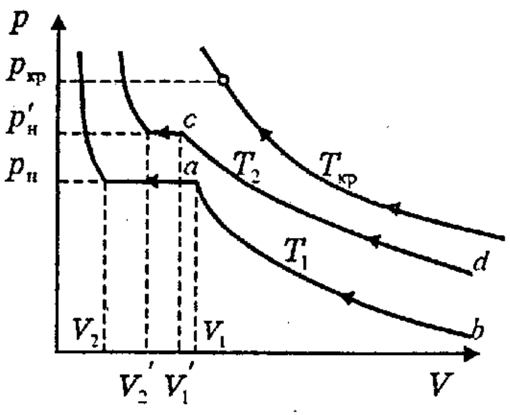


Рис. 7.5

При больших объемах свойства реального газа близки к свойствам идеального (участок $(a-b)$ на изотерме $T_1 = \text{const}$ и участок $(c-d)$ на изотерме $T_2 = \text{const}$, $T_2 > T_1$). Газ на этих участках называют **ненасыщенным паром**. При дальнейшем сжатии из-за возрастающего взаимодействия между молекулами газ начнет конденсироваться (объем V_1 на изотерме $T_1 = \text{const}$ и V_1' на изотерме $T_2 = \text{const}$, причем при $T_2 > T_1$ $V_1' < V_1$). Образуется система, состоящая из жидкости и пара (участки $(V_1 - V_2)$ и $(V_1' - V_2')$ на изотермах). При постоянном объеме количество молекул, покидающих жидкость, равно количеству молекул, возвращающихся в нее. Такое состояние называется **динамическим равновесием**. Пар, находящийся при фиксированной температуре и объеме в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным. Давление и плотность насыщенного пара не зависят от объема и остаются постоянными в процессе дальнейшего сжатия.** При объемах V_2 и V_2' весь пар превращается в жидкость. Отметим, что при $T_2 > T_1$ $V_2' > V_2$. Таким образом, с ростом температуры длина горизонтального участка уменьшается и при температуре, называемой **критической** – $T_{кр}$, обращается в 0. При температуре выше критической пар невозможно превратить в жидкость никаким сжатием.

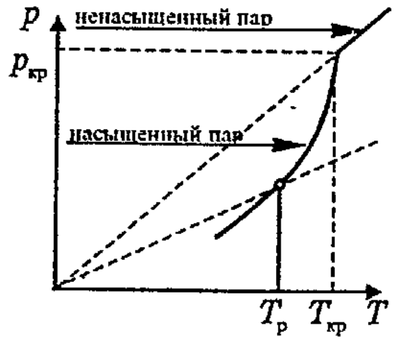


Рис. 7.6

Давление насыщенного пара с ростом температуры возрастает быстрее, чем давление ненасыщенного пара (рис.7.6). Это объясняется тем, что с ростом температуры возрастает не только средняя кинетическая энергия молекул пара, но и растет их концентрация.

При объемах, меньших V_2, весь пар превращается в жидкость, давление которой резко возрастает при незначительном уменьшении объема.

7.10. Влажность воздуха

Известно, что одной из важнейших составляющих атмосферного воздуха являются водяные пары. Влажный воздух принято характеризовать следующими параметрами:

плотность водяных паров (абсолютная влажность) ρ – масса водяных паров в 1м^3 воздуха;

упругость водяных паров p – парциальное давление водяных паров, измеряют в единицах давления;

относительная влажность воздуха

$$\boxed{\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\% = \frac{\rho}{\rho_н} \cdot 100\%} \qquad (7.19)$$

где $p_н$ – давление, а $\rho_н$ – плотность насыщенных водяных паров при данной температуре. Из рис. 7.6 видно, что ненасыщенные водяные пары становятся насыщенными при их охлаждении. Соответствующая этому переходу температура называется **точкой росы** $T_р$.

Парообразование может происходить при любой температуре жидкости. Если этот процесс происходит с поверхности жидкости, то его называют **испарением**. Однако возможен процесс, когда пузырьки насыщенного пара образуются по всему объему жидкости с последующим всплыванием их на поверхность. Этот процесс называют **кипением**. **При кипении давление насыщенного пара должно быть равно внешнему давлению.** Важно знать, что давление насыщенных водяных паров при 100° С равно нормальному атмосферному давлению, т.е.

$p_н = p_0 = 10^5$ Па.

7.11. Поверхностное натяжение жидкостей

Молекулы внутри жидкости и на ее поверхности находятся в различных условиях. Внутри жидкости они окружены такими же молекулами со всех сторон, чего нельзя сказать о молекулах, находящихся в поверхностном слое. Для того, чтобы молекула оказалась в поверхностном слое, необходима затрата внешней работы и, наоборот, ее переход внутрь жидкости сопровождается совершением положительной работы. Ситуация аналогична той, когда тело находится в поле тяжести Земли. Таким образом, **молекулы поверхностного слоя жидкости обладают избыточной потенциальной энергией по сравнению с молекулами, находящимися внутри жидкости.** Величина этой энергии равна

$$\boxed{W = \delta S} \qquad (7.20)$$

где S – площадь поверхности жидкости, δ – **коэффициент поверхностного натяжения.**

Известно, что в состоянии равновесия потенциальная энергия системы минимальна, поэтому жидкость в состоянии равновесия должна иметь минимально возможную поверхность. Отсюда следует, что существуют силы, направленные вдоль поверхно-

сти жидкости по касательной к ней. Их называют силами поверхностного натяжения и вычисляют по формуле

$$\boxed{F = \delta l} \qquad (7.21)$$

где l – длина границы поверхностного слоя.

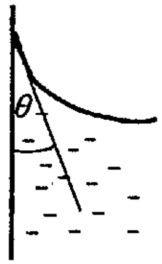


Рис. 7.7

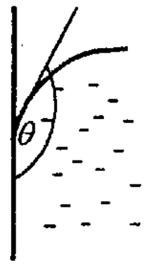


Рис. 7.8

На границе раздела между жидкостью и твердым телом наблюдаются явления смачивания и несмачивания. Если силы притяжения молекул жидкости между собой меньше сил притяжения молекул к поверхности твердого тела, то жидкость смачивает поверхность (рис. 7.7). В противном случае жидкость не смачивает поверхность твердого тела (рис. 7.8).

Угол, образованный касательной к поверхности жидкости у ее границы с твердым телом и поверхностью твердого тела, называется **краевым углом** или **углом смачивания** θ.

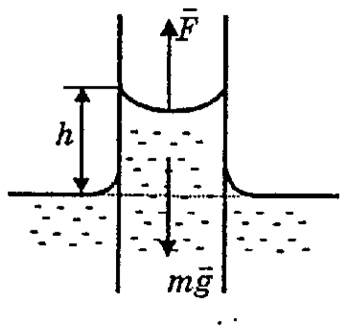


Рис. 7.9

Капилляром называется трубка с малым внутренним диаметром. Если капиллярную трубку опустить в жидкость, то ее уровень в трубке оказывается выше уровня жидкости в случае смачивания, и ниже – в случае несмачивания. В случае смачивания подъем жидкости продолжается до тех пор, пока сила тяжести $m\bar{g}$, действующая на столбик жидкости в капилляре, не станет равной по модулю силе поверхностного натяжения $\bar{F}$, действующей вдоль границы соприкосновения жидкости с поверхностью капилляра $mg = F$ (рис. 7.9).

Сила тяжести $mg = \rho V g = \rho \cdot Shg = \rho \pi r^2 hg$, где ρ – плотность жидкости, r – радиус капилляра.

Сила поверхностного натяжения $F = \delta l = \delta \cdot 2\pi r$.

После подстановки получаем:

$$\boxed{h = \frac{2\delta}{\rho g r}} \qquad (7.22)$$

7.12. Примеры решения задач

Задача 7.1. Идеальный газ, масса которого m и молярная масса μ, расширяется изобарно при некотором давлении. Начальная температура газа – T_1, конечная – T_2. Определить работу, совершаемую газом.

Решение.

Работа в изобарном процессе

$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T$.

Оказалось, что работу в изобарном процессе можно выразить не только через изменение объема по формуле $A = p\Delta V$, но и через изменение температуры: $A = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Полученный результат следует иметь в виду, так как он часто используется при решении более сложных задач.

Задача 7.2. Гелий (He) нагревается при постоянном давлении. При этом ему сообщено $Q = 20$ кДж теплоты. Определить изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу.

Решение.

Так как по условию задачи $p = \text{const}$, то совершаемая газом работа $A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Здесь m – масса газа, μ – его молярная масса, ΔT – изменение температуры (см. задачу 7.1).

Гелий – одноатомный газ, поэтому его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT$, а ее изменение $\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Сравнивая

формулы для работы A и изменения внутренней энергии ΔU, получаем, что $\Delta U = \frac{3}{2}A$.

Запишем первый закон термодинамики для этого процесса: $Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}A + A = \frac{5}{2}A$. Следовательно, работа $A = \frac{2}{5}Q = 8$кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}A = 12$кДж.

Задача 7.3. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется теплота при таком процессе?

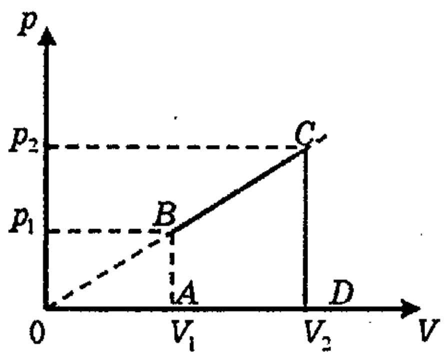


Рис. 7.10

Решение.

Процесс $T = \alpha V^2$ не является ни изобарным, ни изохорным, ни, тем более, изотермическим. Запишем для любого состояния в этом процессе уравнение Менделеева-Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$. Так как $T = \alpha V^2$, то после подстановки получим зависимость давления от объема в виде $p(V) = \alpha\frac{m}{\mu}RV$. График этой зависимости представлен на рис. 7.10.

Совершенная газом работа $A = S_{ABCD} =$

$= \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{m}{\mu}RV_1 + \alpha\frac{m}{\mu}RV_2\right)(V_2 - V_1) =$

$$= \frac{\alpha}{2}\frac{m}{\mu}R\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся первым законом термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Так как газ расширяется, то его работа $A > 0$. Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально изменению температуры, т.е. $\Delta U \sim \Delta T$. Так как $T = \alpha V^2$ и объем возрастает, то возрастает и температура, поэтому $\Delta U > 0$. Тогда и $Q > 0$, что соответствует поглощению газом теплоты.

Задача 7.4. При адиабатном сжатии 1 моля одноатомного газа внешними силами была совершена работа A. Во сколько раз увеличилась среднеквадратичная скорость молекул этого газа, если начальная температура газа равна T_1?

Решение.

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса записывается в виде $0 = \Delta U + A'$, где ΔU – изменение внутренней энергии газа, A' – работа газа в этом процессе. Так как газ сжимают, то $A' < 0$, в то же время внешние силы совершают положительную работу A, причем $A' = -A$. Следовательно, $0 = \Delta U - A \Rightarrow A = \Delta U = U_2 - U_1$. Внутренняя энергия 1 моля идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2}RT$, поэтому $A = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1$. Отсюда выражаем конечную температуру газа $T_2 = T_1 + \frac{2}{3}\frac{A}{R}$.

В задаче 6.2. было показано, что среднеквадратичная скорость молекул выражается формулой $\upsilon = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Поэтому

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{A}{RT_1}}.$$

Задача 7.5. Какое количество теплоты получит 1 моль идеального одноатомного газа при изобарном нагревании от некоторой начальной температуры и последующем адиабатном расширении, если при адиабатном расширении газ совершает работу A, а в конечном состоянии температура равна начальной?

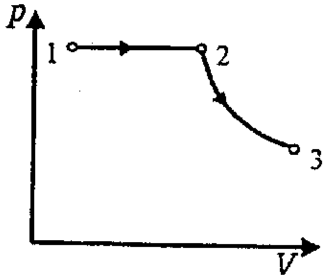


Рис. 7.11

Решение.

Построим график зависимости давления от объема в осях p, V. (рис. 7.11): (1-2) – изобарное нагревание, сопровождаемое увеличением объема; (2-3) – адиабатное расширение. Работа в адиабатном процессе

$$A = -\Delta U = -(U_3 - U_2) = U_2 - U_3 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) =$$

$= \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_3 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$. (По условию задачи $T_3 = T_1$.) $\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{2}{3}\frac{A}{R}$ (*).

Количество теплоты, полученное газом в изобарном процессе:

$$Q = \Delta U + A_{1-2} = (U_2 - U_1) + p\Delta V =$$

$$= \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 + R(T_2 - T_1) =$$

$= \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$ (см. задачи 7.1 и 7.2).

Подставляя из формулы (*) разность температур $(T_2 - T_1)$, находим, что $Q = \frac{5}{2}R \cdot \frac{2A}{3R} = \frac{5}{3}A$.

Задача 7.6. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорно так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Молярная масса газа – μ. Определить совершенную газом работу.

Решение.

График указанного процесса приведен на рис. 7.12.

Здесь (1-2) – изохора, (2-3) – изобара.

Искомая работа $A = A_{1-2} + A_{2-3}$, где A_{1-2} – работа на участке (1-2), а A_{2-3} – работа на участке (2-3). На участке (1-2) $V = \text{const}$, поэтому $A_{1-2} = 0$. На участке (2-3) $p = \text{const}$ и $A = A_{2-3} = p_2(V_3 - V_2)$.

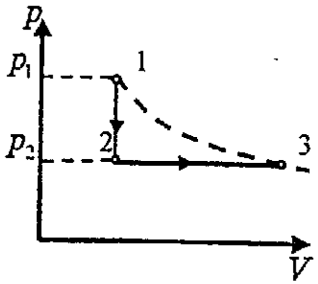


Рис. 7.12

Выражения подобного вида преобразовывают так, чтобы выделить произведение давления на объем в состоянии, в котором задана температура.

$$A = p_2(V_3 - V_2) = p_3(V_3 - V_2) = p_3V_3\left(1 - \frac{V_2}{V_3}\right)$$ (здесь учтено, что $p_2 = p_3$).

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для состояния (3) находим, что

$$p_3V_3 = \frac{m}{\mu}RT;\ A = \frac{m}{\mu}RT\left(1 - \frac{V_2}{V_3}\right) = \frac{m}{\mu}RT\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right) \ (*),$$

так как $V_1 = V_2$. Из состояния (1) в состояние (3) можно переходить по изотерме (1-3) (в этом случае говорят, что точки (1) и (3) расположены на одной изотерме). По закону Бойля-Мариотта

$$p_1V_1 = p_3V_3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{n}.$$ После подстановки в формулу (*) получим: $A = \frac{m}{\mu}RT\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Задача 7.7. Один моль идеального газа изменяет свое состояние по циклу, изображенному на рис. 7.13. (4-1) и (2-3) – изохоры, (3-4) – изобара, (1-2) – процесс с линейной зависимостью давления от объема. Температуры в состояниях 1, 2, 3, 4 равны соответственно T_1, T_2, T_3, T_4. Какую работу совершает газ за один цикл?

Решение.

В замкнутом процессе (цикле) работа равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла, т.е.

$$A = S_{1-2-3-4} = \frac{(p_1 - p_4) + (p_2 - p_3)}{2}(V_3 - V_4) =$$

$$= \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{2}(V_3 - V_4)$$ (так как $p_3 = p_4$).

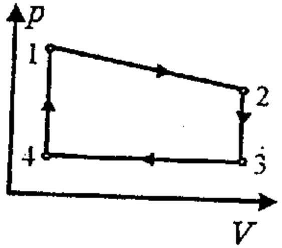


Рис. 7.13

В полученном выражении вынесем за скобки p_3 и V_3, тогда формула для работы перепишется в виде:

$$A = \frac{p_3V_3}{2}\left(\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_2}{p_3} - 2\right)\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right) (*).$$

Для состояния (3) уравнение Менделеева-Клапейрона $p_3V_3 = RT_3$. По закону Шарля для участков (2-3) и (4-1) получаем $\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$ и

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_1}{p_4} = \frac{T_1}{T_4}.$$ По закону Гей-Люссака для участка (3-4) находим $\frac{V_4}{V_3} = \frac{T_4}{T_3}$.

Подставляя найденные отношения в формулу (*) для работы, получаем

$$A = \frac{RT_3}{2}\left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2\right)\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right) = \frac{R(T_3 - T_4)}{2}\left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2\right).$$

Задача 7.8. Тепловая машина имеет КПД $\eta = 40\%$. Каким станет КПД машины, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 20%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 10%?

Решение.

По определению $\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = 1 - \frac{|Q_х|}{Q_н} = 0{,}4,$

где $Q_н$ – теплота, полученная от нагревателя, а $|Q_х|$ – теплота, отдаваемая холодильнику. Следовательно, отношение $\dfrac{|Q_х|}{Q_н}=0{,}6$.

Во втором случае получаемая теплота $Q'_н = 1{,}2Q_н$ (возросла на 20%), а отдаваемая теплота $|Q'_х| = 0{,}9|Q_х|$ (уменьшилась на 10%). Новое значение КПД

$$\eta' = 1 - \frac{|Q'_х|}{Q'_н} = 1 - \frac{0{,}9|Q_х|}{1{,}2Q_н} = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{|Q_х|}{Q_н}\right) = 1 - \frac{3}{4}\cdot 0{,}6 = 0{,}55$$

или 55%.

Задача 7.9. Найти коэффициент полезного действия тепловой машины, рабочим телом которой является 1 моль идеального одноатомного газа. Машина работает по циклу, изображенному на рис. 7.14: (1-2) – изохора, (3-1) – изобара.

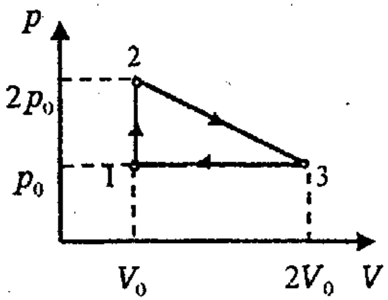


Рис. 7.14

Решение.

Найдем температуру газа в состоянии (1), используя уравнение Менделеева-Клапейрона: $p_0V_0 = RT_1 \Rightarrow T_1 = \dfrac{p_0V_0}{R}$.

Для состояния (2) получаем: $2p_0V_0 = RT_2 \Rightarrow T_2 = \dfrac{2p_0V_0}{R}$.

В состоянии (3): $2p_0V_0 = RT_3 \Rightarrow T_3 = \dfrac{2p_0V_0}{R}$.

Тот факт, что $T_2 = T_3$, вовсе не означает, что (2-3) – изотермический процесс. Из рис. 7.14 видно, что это – процесс, в котором давление зависит от объема по линейному закону.

Работа газа за цикл численно равна площади прямоугольного треугольника:

$$A = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0.$$

Рассмотрим участок (1-2), где $V_0 = \text{const}$. Используя первый закон термодинамики для этого участка, получаем, что количество теплоты на этом участке

$$Q_{1-2} = \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) =$$
$$= \frac{3}{2}R\left(\frac{2p_0V_0}{R} - \frac{p_0V_0}{R}\right) = \frac{3}{2}p_0V_0 > 0.$$
Газ на этом участке теплоту получает.

Рассмотрим участок (2-3). Первый закон термодинамики записывается в виде $Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}$ (*).

Изменение внутренней энергии на этом участке

$$\Delta U = U_3 - U_2 = \frac{3}{2}R(T_3 - T_2) = 0.$$

Работа на участке (2-3) численно равна площади трапеции, ограниченной графиком процесса и прямыми $V = V_0$ и $V = 2V_0$.

Итак, $A_{2-3} = \dfrac{2p_0 + p_0}{2}(2V_0 - V_0) = \dfrac{3}{2}p_0V_0$. Подставляя в формулу (*), находим, что $Q_{2-3} = \dfrac{3}{2}p_0V_0 > 0$. И на этом участке газ теплоту получает.

Рассмотрим участок (3-1), где $p_0 = \text{const}$. Количество теплоты $Q_{3-1} = \Delta U + A_{3-1}$. Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = U_1 - U_3 = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2}p_0V_0.$$

Работа $A_{3-1} = p_0\Delta V = p_0(V_0 - 2V_0) = -p_0V_0$. Таким образом, $Q_{3-1} = -\dfrac{5}{2}p_0V_0 < 0$. На этом участке газ теплоту отдает.

Теплота, полученная от нагревателя:

$$Q_н = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{3}{2}p_0V_0 = 3p_0V_0.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{1}{6} \text{ или } \eta = 16{,}7\%.$$

Задача 7.10. Найти КПД тепловой машины, работающей с ν молями одноатомного идеального газа по циклу, состоящему из адиабатного расширения (1-2), изотермического сжатия (2-3) и изохорного процесса (3-1) (рис. 7.15). Работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, равна A. Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.

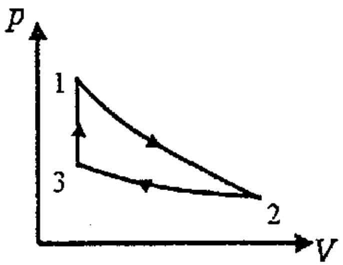


Рис. 7.15

Решение.

Проследим за изменением температуры в этом цикле. При адиабатном расширении (1-2) температура газа уменьшается, поэтому $T_2 < T_1$. При изотермическом сжатии (2-3) температура постоянна, поэтому $T_3 = T_2$. При изохорном сжатии температура возрастает, поэтому $T_1 > T_3$. Таким образом, максимальная температура в цикле – T_1, а минимальная достигается на изотерме. Разность между максимальной и минимальной температурами $\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - T_3$.

По определению КПД тепловой машины $\eta = \dfrac{A_O}{Q_н}$. Здесь A_O – работа за цикл, а $Q_н$ – теплота, полученная от нагревателя.

Вычислить работу за цикл A_O как площадь фигуры здесь не представляется возможным, так как в школе не изучают уравнение адиабатного процесса. Работу за цикл выразим как сумму работ на отдельных участках: $A_O = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$.

В адиабатном процессе (1-2) работа

$$A_{1-2} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_2 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) =$$

$= \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T$. Количество теплоты в этом процессе $Q_{1-2} = 0$.

При изотермическом сжатии (2-3) работа газа отрицательна и равна работе внешних сил над газом, взятой со знаком минус, т.е. $A_{2-3} = -A$. Количество теплоты на этом участке $Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}$, причем $\Delta U = 0$.

Поэтому $Q_{2-3} = -A < 0$. Здесь газ теплоту отдает.

При изохорном сжатии (3-1) работа $A_{3-1} = 0$, а количество теплоты

$$Q_{1-3} = \Delta U = U_1 - U_3 = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_3 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3) =$$

$= \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T > 0$, на этом участке газ теплоту получает. Итак, работа за цикл $A_C = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T - A$; теплота, полученная от нагревателя $Q_н = Q_{3-1} = \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T$. После этого легко находим

$$\eta = \frac{\frac{3}{2}\nu R\Delta T - A}{\frac{3}{2}\nu R\Delta T} = 1 - \frac{2}{3}\frac{A}{\nu R\Delta T}.$$

Задача 7.11. Теплоизолированный сосуд разделен на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда находится 1 моль идеального одноатомного газа, в правой – вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружинкой, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Определить теплоемкость системы. Теплоемкостью сосуда, поршня и пружины можно пренебречь. (Рис. 7.16)

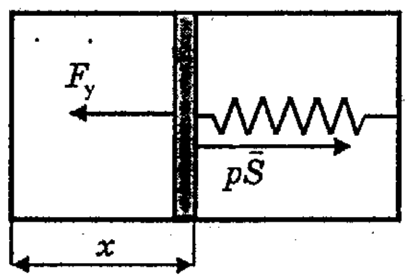


Рис. 7.16

Решение.

По определению теплоемкость $c = \dfrac{Q}{\Delta T}$, где Q – количество теплоты, сообщенное газу, а ΔT – изменение его температуры. Выражая Q через изменение внутренней энергии ΔU и термодинамическую работу A, получим, что

$$c = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} \qquad (*).$$

Как было показано в разделе 7.6, $\dfrac{\Delta U}{\Delta T} = c_V$, и поскольку дан 1 моль идеального одноатомного газа, то $c_V = \dfrac{3}{2}R$.

В результате нагревания газа поршень смещается на некоторое расстояние x. Пусть в этом состоянии давление газа – p, температура – T, а объем $V = Sx$, где S – площадь сечения поршня. Эти параметры связаны уравнением Менделеева-Клапейрона: $pV = RT$ (1). При этом на поршень действуют: сила давления газа, pS и сила упругости пружины, модуль которой $F_y = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины, x – ее деформация. В любом равновесном состоянии выполняется равенство $pS - F_y = 0 \Leftrightarrow pS = kx$ (2).

Разделив равенство (1) на (2), получим:

$$\frac{V}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow \frac{Sx}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow T = \frac{kx^2}{R} = \frac{k}{R}\cdot\left(\frac{V}{S}\right)^2.$$

Подставляя в равенство (1), находим зависимость давления от объема в этом процессе:

$$p(V) = \frac{RT}{V} = \frac{R}{V}\cdot\frac{k}{R}\cdot\left(\frac{V}{S}\right)^2 = \frac{k}{S^2}V \quad (3).$$

Как видно, зависимость эта линейная, ее график представлен на рис. 7.17. Пусть газ расширяется от объема V_1 до объема V_2. Тогда его давление изменяется от $p_1 = \dfrac{k}{S^2}V_1$ до $p_2 = \dfrac{k}{S^2}V_2$. Работа газа численно равна площади трапеции с основаниями p_1 и p_2 и высотой $(V_2 - V_1)$. Итак,

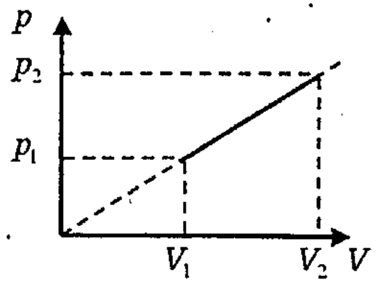


Рис. 7.17

$$A = \frac{(p_2 + p_1)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{S^2}V_2 + \frac{k}{S^2}V_1\right)(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k}{S^2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{S^2}V_2^2 - \frac{k}{S^2}V_1^2\right).$$

Из равенства (3) следует, что $\dfrac{k}{S^2}V^2 = RT$, поэтому

$A = \dfrac{1}{2}(RT_2 - RT_1) = \dfrac{R}{2}\Delta T$. В равенстве (*) отношение $\dfrac{A}{\Delta T} = \dfrac{R}{2}$, поэтому искомая теплоемкость

$$c = \frac{3}{2}R + \frac{R}{2} = 2R.$$

Задача 7.12. В длинной гладкой теплоизолированной трубе между двумя поршнями с одинаковой массой m находится 1 моль одноатомного газа при температуре T_0. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны $5v$ и v. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Массой газа по сравнению с массой поршней можно пренебречь (рис. 7.18).

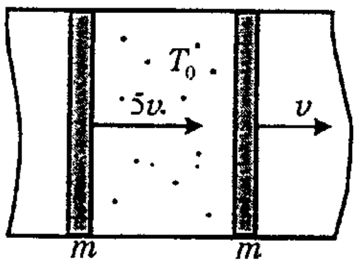


Рис. 7.18

Решение.

Система, состоящая из двух поршней и 1 моля идеального газа, в начальный момент времени обладает энергией, равной сумме кинетических энергий поршней и внутренней энергии газа, т.е.

$$W_1 = \frac{m(5v)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}RT_0.$$

При этом начальный импульс системы направлен слева направо и его модуль равен $P_1 = 5mv + mv = 6mv$.

Так как начальная скорость левого поршня больше, чем правого, то газ между поршнями подвергается сжатию. При этом скорость правого поршня возрастает, а скорость левого – убывает. Так как система теплоизолирована, то сжатие газа приводит к росту его температуры. Отсюда следует, что температура перестает расти и достигает максимума в тот момент, когда прекращается сжатие, а это соответствует равенству скоростей поршней. Пусть скорость поршней в этот момент равна u. Энергия системы равна $W_2 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{3}{2}RT_{max}$, а ее импульс $P_2 = mu + mu = 2mu$.

Используя закон сохранения импульса и энергии, получаем систему:

$$\begin{cases} P_1 = P_2, \\ W_1 = W_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6mv = 2mu, \\ \frac{26mv^2}{2} + \frac{3}{2}RT_0 = \frac{2mu^2}{2} + \frac{3}{2}RT_{max}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v, \\ 26mv^2 + 3RT_0 = 2mu^2 + 3RT_{max}, \end{cases} \Rightarrow T_{max} = T_0 + \frac{8mv^2}{3R}.$$

Задача 7.13. В калориметре плавает в воде кусок льда. В калориметр опускают нагреватель постоянной мощности $P = 50$ Вт и начинают ежеминутно измерять температуру воды. В течение первой и второй минут температура воды не изменяется, к концу третьей минуты – увеличивается на $\Delta t_1 = 2°C$, а к концу четвертой еще на $\Delta t_2 = 5°C$. Сколько граммов воды и льда было изначально в калориметре? Удельная теплота плавления льда λ =330Дж/г, удельная теплоемкость воды c =4,2Дж/(град·г).

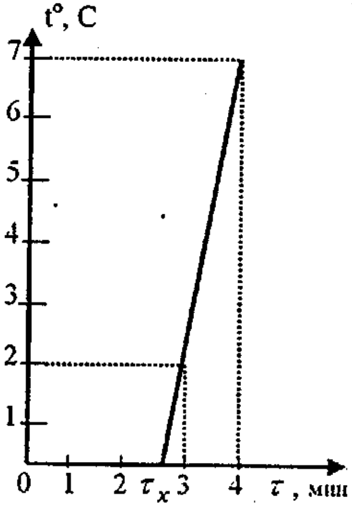


Рис. 7.19

Решение.

Построим график зависимости температуры t от времени τ (рис. 7.19). Из условия задачи следует, что начальная температура воды и льда в калориметре $t = 0°$ С. В течение некоторого времени температура в калориметре не изменяется, так как вся сообщаемая теплота идет на плавление льда. Лед растает в момент времени $\tau_x \geq 2$ мин, после чего в калориметре образуется вода, масса которой $m_л + m_в$, где $m_л$ и $m_в$ – начальное количество льда и воды в калориметре.

При $\tau > \tau_x$ время нагревания воды равно $\tau - \tau_x$, сообщенная нагревателем теплота $Q = P(\tau - \tau_x)$. Это количество теплоты идет на нагревание воды от 0°С до некоторой температуры $t°$ С, поэтому $Q = c(m_л + m_в)t$. Получаем равенство $P(\tau - \tau_x) = c(m_л + m_в)t \Rightarrow$

$$t = \frac{P(\tau - \tau_x)}{c(m_л + m_в)} = \frac{P}{c(m_л + m_в)}\tau - \frac{P}{c(m_л + m_в)}\tau_x.$$

Таким образом, при $\tau > \tau_x$ температура воды в калориметре есть линейная функция от времени τ. График зависимости $t(\tau)$ представлен на рис. 7.19. Линейную зависимость на этом графике можно представить в виде $t(\tau) = k\tau + b$. Так как известны две точки, принадлежащие этой прямой, то можно найти коэффициенты k и b этой зависимости. При $\tau = 3$ $t = 2$, при $\tau = 4$ $t = 7$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3k + b = 2, \\ 4k + b = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5, \\ b = -13, \end{cases} \Rightarrow t(\tau) = 5\tau - 13.$$

Теперь легко определить момент времени τ_x, когда растает весь лед: $5\tau_x - 13 = 0 \Rightarrow \tau_x = 2,6$ мин.

Как уже отмечалось, при $\tau = \tau_x$ вся сообщаемая теплота, равна $P\tau_x$ идет на плавление льда, поэтому

$$P\tau_x = \lambda m_л \Rightarrow m_л = \frac{P\tau_x}{\lambda} = 2,36 \cdot 10^{-2}\ кг = 23,6г.$$

При $\tau = 3$ мин=180с имеем равенство

$$P(\tau - \tau_x) = c(m_л + m_в)\Delta t_1 \Rightarrow m_в = \frac{P(\tau - \tau_x)}{c} - m_л =$$
$= 119{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг $= 119{,}3$ г.

Задача 7.14. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массой $M = 0{,}1$ кг, в который вмерзла свинцовая дробинка массой $m = 5$ г. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Температура воды в сосуде – 0°С; плотность $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность свинца $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м³.

Решение.

Дробинка начнет тонуть, если средняя плотность льда вместе с дробинкой станет равной или больше плотности воды: $\rho_{ср} \ge \rho_в$. Пусть $M_л$ – масса оставшегося льда, тогда объем оставшегося куска $V = \dfrac{M_л}{\rho_л} + \dfrac{m}{\rho_{св}}$. Средняя плотность куска льда вместе с дробинкой

$$\rho_{ср} = \frac{M_л + m}{V} = \frac{M_л + m}{M_л/\rho_л + m/\rho_{св}} = \rho_в \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_л = m\frac{1 - \rho_в/\rho_{св}}{\rho_в/\rho_л - 1} = 41\,г.$$

Таким образом, должна растаять масса льда $M - M_л = 100 - 41 = 59$ г. Для этого необходимо сообщить количество теплоты $Q = \lambda(M - M_л) = 19{,}5 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 7.15. В латунном калориметре массой $m_1 = 0{,}1$ кг находится $m_2 = 5$ г льда при температуре $t = -10°$ С. В калориметр вливают $m_3 = 30$ г расплавленного свинца при температуре плавления. Какая температура θ установится в калориметре? Удельная теплоемкость латуни и льда равны соответственно $c_1 = 0{,}38 \cdot 10^3$ Дж/кг · К;

$c_2 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/кг · К. Удельная теплота плавления льда и свинца равны $\lambda_2 = 3{,}30 \cdot 10^5$ Дж/кг; $\lambda_{св} = 0{,}25 \cdot 10^5$ Дж/кг. Температура плавления свинца $T_{пл} = 600$ К. Удельная теплоемкость свинца $c_{св} = 0{,}13 \cdot 10^3$ Дж/кг · К.

Решение.

Так как свинец будет охлаждаться, а лед вместе с калориметром нагреваться, то в калориметре после окончания процессов теплообмена установится температура $\theta \in (T; T_{пл})$. Можно сделать предположение, что в калориметре весь свинец отвердеет и охладится до $0°C$, а весь лед при этом растает, т.е. мы выбираем $\theta = 0°C = 273K$. Проверим истинность нашего предположения, воспользовавшись уравнением теплового баланса.

Теплота, необходимая для нагревания калориметра до θ, равна: $Q_1 = c_1 m_1(\theta - t) = 0{,}38 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1}(273 - 263) =$ $=380$ Дж.

Теплота, необходимая для нагревания льда до θ: $Q_2 = c_2 m_2(\theta - t) = 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 105$ Дж.

Теплота, необходимая для плавления всего льда: $Q_л = \lambda_2 m_2 = 3{,}3 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1650$ Дж.

Теплота, выделившаяся при отвердевании свинца, $Q_{св} = -\lambda_{св} m_3 = -0{,}25 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = -750$ Дж.

Теплота, выделившаяся при остывании свинца до θ: $Q_3 = c_3 m_3(\theta - T_{пл}) = 0{,}13 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3}(273 - 600) =$ $=-1270$Дж.

Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$Q_1 + Q_2 + Q_л = |Q_{св}| + |Q_3| \Rightarrow$$

(380+105+1650) Дж = 750+1270 Дж $\Rightarrow$ 2135 Дж =2020Дж, т.е., выделившейся при охлаждении свинца теплоты недостаточно, чтобы расплавить весь лед.

Рассчитаем теперь другой случай: калориметр со льдом нагревается до $0°C$, но лед не тает. В этом случае $Q_1 + Q_2 = |Q_{св}| + |Q_3| \Rightarrow 485$ Дж = 2020Дж. Это говорит о том, что часть льда растает.

Пусть масса растаявшего льда – m_x, тогда $Q_л = \lambda_2 m_x$, и уравнение баланса запишется в виде:

$$Q_1 + \lambda_2 m_x + Q_2 = |Q_{св}| + |Q_3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{|Q_{св}| + |Q_3| - Q_1 - Q_2}{\lambda_2} = 4{,}7 \cdot 10^{-3}\,кг.$$

Итак, в калориметре установится температура $\theta = 0°\,C$. В нем будут находиться: 0,3 г льда; 4,7 г воды; 30 г твердого свинца.

Задача 7.16. В комнате объемом $V = 50\,м^3$ воздух имеет температуру $t = 27°\,C$ и относительную влажность $\varphi_1 = 30\%$. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\alpha = 2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $\varphi_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров при $t = 27°\,C$ $p_н = 3565\,Па$, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение.

Относительная влажность воздуха $\varphi_1 = \dfrac{p_1}{p_н} = 0{,}3$. Здесь $p_1 = \varphi_1 p_н$ – давление ненасыщенных водяных паров. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона $p_1 V = \dfrac{m_1}{\mu} RT$, откуда масса водяных паров $m_1 = \dfrac{p_1 V\mu}{RT} = \dfrac{\varphi_1 p_н V \mu}{RT}$.

После того, как относительная влажность воздуха в комнате стала равна φ_2, давление водяных паров $p_2 = \varphi_2 p_н$. Масса водяных паров увеличилась и стала равной $m_2 = \dfrac{\varphi_2 p_н V\mu}{RT}$. Следовательно, дополнительно испарилось $(m_2 - m_1)$ воды. Для этого потребовалось время $t = \dfrac{m_2 - m_1}{\alpha} = \dfrac{p_н V\mu}{\alpha RT}(\varphi_2 - \varphi_1) =$ 0,26 ч = 15,5 мин.

Задача 7.17. В цилиндре под поршнем находится $m = 10$ г водяного пара при температуре $t = 100°\,C$ и давлении $p = 4 \cdot 10^4\,Па$. Какая масса пара сконденсируется, если объем пара изотермически уменьшить в 5 раз?

Решение.

Известно, что при температуре $t = 100°\,C$ давление насыщенных водяных паров $p_н = 10^5\,Па$. Так как по условию давление паров $p = 4 \cdot 10^4\,Па$, то они ненасыщенны, причем известны их масса, температура и давление. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, найдем их объем: $pV = \dfrac{m}{\mu} RT \Rightarrow$ $V = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{p}$. Здесь $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды.

После изотермического сжатия пар становится насыщенным, часть его переходит в жидкое состояние. Массу пара обозначим через $m_п$; объем, который он занимает, равен $\dfrac{1}{5}V$ (объемом жидкости можно пренебречь). Применив уравнение Менделеева-Клапейрона, получим:

$$p_н \cdot \frac{1}{5} V = \frac{m_п}{\mu} RT \Rightarrow$$

$$m_п = \frac{p_н V\mu}{5RT} = \frac{p_н \mu}{5RT} \cdot \frac{m}{\mu}\frac{RT}{p} = \frac{1}{5} m \cdot \frac{p_н}{p} = 5\,г.$$

Масса сконденсировавшегося пара равна $m - m_п = 5$ г.

Задача 7.18. Чему равен коэффициент поверхностного натяжения воды, если с помощью пипетки, имеющей кончик диаметром $d = 0{,}4$ мм, можно дозировать воду с точностью до $m = 0{,}01$ г?

Решение.

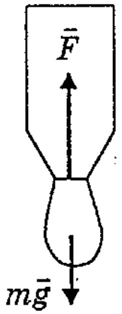


Рис. 7.20

К капле приложены силы: $m\bar{g}$ – сила тяжести и $\bar{F}$ – сила поверхностного натяжения (рис. 7.20). Из условия равновесия капли найдем, что $mg - F = 0 \Rightarrow F = mg$ (*). Выразим силу поверхностного натяжения $F = \delta l = \delta 2\pi R$, где $R = d/2$ – радиус кончика пипетки. После подстановки в формулу (*) получим: $\delta\pi d = mg \Rightarrow$ $\Rightarrow \delta = mg/\pi d = 0{,}078$ Н/м.

Задача 7.19. Верхний конец вертикально расположенного капилляра длиной l закрыт пробкой. Если нижний конец капилляра привести в соприкосновение с поверхностью воды, то вода поднимется в капилляре на высоту h. На какую высоту поднимется вода в капилляре, если открыть пробку? Атмосферное давление равно p_0, плотность воды – ρ, ее коэффициент поверхностного натяжения – δ.

Решение.

Рассмотрим условия равновесия столбика воды высотой h в капилляре. Вертикально вверх на этот столбик действуют: сила атмосферного давления $p_0 S$, где S – сечение капилляра, и сила поверхностного натяжения, равная $\delta \cdot 2\pi r$, где r – радиус капилляра. Вертикально вниз на столбик действуют: сила тяжести столбика воды, равная $mg = \rho g S h$, и сила давления воздуха, находящегося над столбиком воды, равная $p_в S$, где $p_в$ – давление воздуха. Запишем условие равновесия:

$$p_0 S + \delta \cdot 2\pi r = \rho g S h + p_в S \Rightarrow p_0 + \frac{\delta}{S} \cdot 2\pi r = \rho g h + p_в.$$

Учитывая, что $S = \pi r^2$, получаем $p_0 + \dfrac{2\delta}{r} = \rho g h + p_в$ (*).

Непосредственно перед соприкосновением капилляра с поверхностью воды воздух занимал весь объем капилляра $V_1 = Sl$ и находился при атмосферном давлении. Когда вода в капилляре поднялась на высоту h, объем воздуха стал равен $V_2 = S(l - h)$, а его давление – $p_в$. Так как температура неизменна, то из свойств изотермического процесса получаем:

$$p_0 V_1 = p_в V_2 \Rightarrow p_0 l = p_в (l - h) \Rightarrow p_в = \frac{p_0 l}{l - h}.$$

Подставляя $p_в$ в уравнение (*), находим, что

$$p_0 + \frac{2\delta}{r} = \rho g h + \frac{p_0 l}{l - h} \quad (**).$$

Если открыть пробку, высота столбика воды становится равной $h' = \dfrac{2\delta}{\rho g r}$ (формула 7.22.) Разделив равенство (**) на ρg, получим:

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{2\delta}{r\rho g} = h + \frac{p_0 l}{\rho g(l - h)} \Rightarrow \frac{p_0}{\rho g} + h' = h + \frac{p_0 l}{\rho g(l - h)} \Rightarrow$$

$$h' = h + \frac{p_0 l}{\rho g(l - h)} - \frac{p_0}{\rho g} = h + \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{l}{l - h} - 1\right) =$$

$$= h\left(1 + \frac{p_0}{\rho g(l - h)}\right).$$